EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

21e JAARGANG 1945/46
(de jaargang 1944/45 is overgeslagen)

Nr. 1, 2

Prijs per jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. – GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van L i w e n a g e l (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van W i m e c o s (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1945 t/m 31 Augustus 1946 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

OFFICIEELE MEDEDEELINGEN VAN WIMECOS.

Contributie.

Het ligt in de bedoeling van het Bestuur, om aan de Algemeene Vergadering, welke vermoedelijk in de a.s. Kerstvacantie gehouden wordt, aan de leden voor te stellen over het Vereenigingsjaar 1944—1945 geen contributie te heffen. Leden, die reeds over dit jaar contributie hebben betaald, zullen deze natuurlijk in mindering kunnen brengen bij het betalen van de contributie over 1945—1946. Eenige leden hebben nog niet hun contributie betaald over het jaar 1943—1944. Hun wordt verzocht, alsnog een bedrag van *f* 2,50 te storten op de postgirorekening van de Vereeniging van Wiskundeleeraren te Amsterdam, no. 143917.

Adreswijzigingen.

In verband met een goede administratie en het op tijd toezenden van Euclides wordt aan de leden verzocht de hun toegezonden kaarten voor de adressen, indien dit nog niet is geschied, alsnog op te zenden. Tevens dringt het Bestuur er bij de leden op aan, Wiskundeleeraren, die nog geen lid zijn, te bewegen lid te worden! Nu er vrijwel geen H.B.S. meer is, of er zijn leden van Wimecos aan werkzaam, moet het niet moeilijk meer zijn, om *alle* Wiskundeleeraren te bereiken.

Urentabel.

In Juli j.l. heeft het Bestuur zich tot den Minister gewend, om te komen tot een herstel van het aantal Wiskunde-uren in de eerste klasse en het aantal Mechanica-uren in de vijfde klasse.

Namens het Bestuur:

De Secretaris

J. J. TEKELENBURG.

Verslag van de Algemeene Vergadering van 28 December 1945.

In deze vergadering werden de notulen van de vorige Algemeene Vergadering en de Jaarverslagen van Secretaris en Penningmeester goedgekeurd. Als Secretaris werd de aftredende functionaris herkozen. Over 1944/1945 zal geen contributie worden geheven, terwijl deze voor 1945/1946 op *f* 3,50 wordt gebracht, waarbij het abonnement voor Euclides is begrepen. De Penningmeester verzoekt dit bedrag op de girorekening ten name van de Vereeniging van Wiskundeleeraren te Amsterdam, no. 143917, te storten. In de middagvergadering werden de aangekondigde voordrachten van Dr. H. D. Kloosterman en den Heer G. A. Janssen gehouden. Deze zullen in Euclides worden gepubliceerd.

De Secretaris

J. J. TEKELENBURG.

„DE BEVRIJDING".

In het eerste nummer van „Euclides", dat in bevrijd Nederland verschijnt, mag ik en moet ik als voorzitter van „Wimecos" een enkel woord schrijven.

Dat gebeurt met *weemoed,* omdat we zooveel *verloren.* Ook als vereeniging. Hoeveel leden ontvielen ons? We weten dat zelfs niet!

Over het zinlooze, het barbaarsche, het goddelooze optreden van den vijand met zijn satellieten spreek ik verder niet. Maar hoevelen van onze leden zijn door dat optreden ons ontnomen? Wij gedenken hen met smart.

Voor zoover zij hun leven gaven, ook voor ons, gedenken we hen met eerbied en in groote dankbaarheid.

Voor zoover hun leven werd genomen, niettegenstaande ons, tot onze groote verbazing en tot onze groote ontsteltenis, is er bitterheid in ons, misschien zelfs schaamte.

Hadden wij door meer eensgezindheid, onder steviger leiding, met meer zelfvertrouwen en bij beslister beginsel, niet sterker kunnen staan en misschien veel kunnen voorkomen.

Dat het den vijand mogelijk is geweest zooveel maatregelen tegen de Joden te nemen en zooveel Joodsche medeburgers weg te voeren, beschouw ik als een schande voor ons Christenen. Want al is in onze kerken duidelijk, nadrukkelijk en met overtuiging uitgesproken, voor ons en door ons, hoe wij als Christenen over de daden van den bezetter oordeelden en moesten oordeelen, wij gevoelen ons niet vrij van schuld, nu dit alles mogelijk was en werd volbracht.

Ook voor de daden van onze tegenstanders zijn wij voor een deel aansprakelijk.

Ik hoop, dat wij allen, die ons ontvielen, met name in ons blad zullen noemen en met de redactie roep ik allen op, die gegevens kunnen verschaffen, om ons die zoo spoedig mogelijk te leveren.

Er is ook groote *dankbaarheid,* omdat we zooveel *terug ontvingen.* Het is vandaag 31 Augustus. Ik mocht vanmorgen de vlag weer uitsteken. Het meisje wilde dit eerst doen. Ze zei later tegen me, „ik zag aan uw gezicht, dat U dit zelf wilde doen en daarom liet ik U begaan". Inderdaad! Bij het uitsteken van de vlag, de eerste maal op 31 Augustus in bevrijd Nederland, doen we dat bewust, gaan er heel wat gedachten door ons hoofd en gaat er heel wat om in onze ziel. Wat zijn wij een gezegend volk, dat we zoo'n Koningin mochten hebben tijdens de bezetting en mogen hebben na de bevrijding. Men zegt wel eens, dat Hare Majesteit niet gemakkelijk is. Wij zijn er dankbaar voor, dat Zij hooge eischen stelt, want wij weten, dat Zij in de eerste plaats eischen stelt aan zich zelf. Wat een voorrecht, dat Zij, op haar leeftijd, nog blijft regeeren en nog

Koningin wil zijn. En toen kwam deze gedachte, een gedachte na de bezetting en de bevrijding.

Waren er maar meer regeerders en bestuurders van dat formaat, van dat karakter, menschen, die alleen durven te staan en die alleen kunnen staan.

Waren er maar meer geweest tijdens de bezetting en laten er, hopen we, velen zijn in bevrijd Nederland.

En er is *hoop* en *verwachting,* omdat we zooveel *verplichtingen* en zulk een groote *verantwoordelijkheid* hebben.

Er zal gewerkt moeten worden. Met zelfverloochening en zelfovergave! Hard gewerkt en met opgewektheid gewerkt!

We mogen weer werken onder eigen leiding. Daarom zullen we ons moeten geven met volle kracht.

Zou ons volk weer een volk van formaat kunnen worden? Door al het lijden en door al de vervolging en na al den druk?

„Palma sub pondere crescit." In 't natuurlijke is dat zoo. Maar geestelijk geldt het nog sterker. Daarom is er hoop.

Als we werkelijk dankbaar zijn, gevoelen we onze verantwoordelijkheid.

En als we onze verantwoordelijkheid gevoelen en onze verplichtingen erkennen, kunnen we en mogen we met vertrouwen, met hoop en verwachting, de toekomst tegengaan.

31 Augustus 1945. Dr. J. SPIJKERBOER.

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ook ons tijdschrift „Euclides" verheugt zich over zijn opnieuw verschijnen, na een tijd van knechtschap. De laatste periode van het oorlogsgeweld heeft van het bestuur van L.i.w.e.n.a.g.e.l. zware offers geëist. Het gewelddadig heengaan van onzen onvergetelijken voorzitter Dr. C. de Jong is reeds in „Euclides" gememoreerd, maar ook onzen ondervoorzitter Dr. H. C. Schamhardt en den oud-penningmeester W. L. Varossieau was het niet gegeven om dit herverschijnen van „Euclides" mee te maken.

Ten gevolge van het bombardement op 3 Maart j.l. van het Bezuidenhout in Den Haag zijn zowel het gehele archief, als ook alle kasboeken volledig door de brand vernietigd.

Zo is dus L.i.w.e.n.a.g.e.l. genoodzaakt om als het ware van meet af aan te beginnen, maar met het volle vertrouwen in de toekomst hopen wij met de medewerking van alle leden. L.i.w.e.n.a.g.e.l. weer tot zijn oude luister te kunnen opwerken.

Moge het „Euclides" gegeven zijn nu verder in een onafgebroken reeks van jaren de Wiskundedocenten een hulpbron en een prettige leiddraad bij hun beroep te wezen! A. T. M. KRAMER.

Dr. J. HAAK.



In de maand Juni kwam het ontstellend bericht binnen, dat Dr. J. Haak, leeraar aan het Amsterdamsch en aan het Montessori Lyceum, in het concentratiekamp van Sachsenhausen overleden was.

Dr. Jur. Haak was 3 November 1891 te Semarang geboren. Na eindexamen H.B.S. en Staatsexamen te hebben afgelegd, studeerde hij aan de Gemeente Universiteit te Amsterdam Wis- en Natuurkunde. Na zijn doctoraal examen was hij gedurende korte tijd in Alkmaar aan de R.H.B.S. werkzaam, om reeds in 1918 naar Indië te vertrekken, waar hij leeraar aan de H.B.S. te Semarang werd. In 1921 volgde echter zijn benoeming tot leeraar aan de Tweede H.B.S. te Haarlem. Het volgende jaar werd hij verbonden aan het Amsterdamsch Lyceum, waar hij verder is gebleven. Thans kreeg hij gelegenheid, om zich aan zijn promotie te wijden. In 1928 promoveerde hij bij Prof. Dr. Hk. de Vries

op het proefschrift „Stelsels van Cirkels in de Ruimte".

Toen het Montessori-onderwijs ook bij het Middelbaar Onderwijs begon door te dringen, was Haak, aangetrokken door het meer individueele karakter er van, al spoedig een der leidende figuren bij het in Amsterdam opgerichte Montessori Lyceum. Dit onderwijs, dat de overgroote meerderheid van ons, vermoedelijk uit onbekendheid er mee, met een zeker wantrouwen beschouwt, placht hij enthousiast te verdedigen.

Ook in de sportwereld was Jur. Haak geen onbekende. Hij was een typisch voorbeeld van het vooral in vroeger jaren nogal gevreesde samengaan van sport en studie. In zijn jonge jaren was hij een uitstekende voetballer en athleet. In de eerste sport bracht hij het tot Nederlandsch-Elftalspeler. Bij de athletiek zij o.a. vermeld, dat hij op een gegeven oogenblik het Nederlandsch record hoogspringen op zijn naam had staan.

In zijn gezin werd ook vóór de oorlog veel aan liefdadigheid gedaan en dit is de oorzaak van zijn ongeluk geworden. In de oorlogsjaren, toen er zooveel gesteund moest worden, aanvaardde hij het groote risico, dat hieraan verbonden was. Heel wat menschen zullen hem en zijn familie met dankbaarheid gedenken! Op een gegeven oogenblik liep een van zijn zoons echter in de val. Een huiszoeking volgde, waarna het echtpaar Haak op 3 Augustus 1943 werd gearresteerd. Na eenige tijd in Vught te hebben gezeten, werd hij in Mei 1944 naar het beruchte Dachau gebracht. Door de daar ondervonden behandeling verzwakte hij steeds meer. Onder het voorwendsel, dat hij wetenschappelijk werk zou mogen verrichten, werd hij naar Sachsenhausen gevoerd. Op 28 Januari j.l. aldaar in een „ziekenhuis" opgenomen, is hij op 30 Januari 1945 aan dysenterie overleden. Tragisch is, dat ook zijn vrouw het concentratiekamp niet heeft overleefd. Zij overleed in het kamp Reichenbach bij Breslau.

Hoe gering zijn toch onze eigen offers geweest in vergelijking met hetgeen deze beide menschen gedaan en gegeven hebben! Gedenken wij hen steeds met eerbied en dank voor hetgeen zij voor zoovelen geweest zijn!

J. J. TEKELENBURG.



WYBREN OOSTERBAAN werd geboren op 27 April '84 te Achlum in Friesland. Hij bezocht de H.B.S. te Leeuwarden en studeerde te Delft, waar hij in 1909 het diploma van werktuigkundig ingenieur verwierf.

Van het begin af voelde hij zich tot het onderwijs aangetrokken.

Als tijdelijk leraar werkte hij achtereenvolgens aan de R.H.B.S. te Utrecht (1 Nov. '09—31 Dec. '09), Venlo (1 Jan. '10—31 Aug. '11) en Schiedam (1 Sept. '11—31 Dec. '12).

Op 1 Jan. '13 werd hij tijdelijk leraar aan de Koninklijke H.B.S. te Apeldoorn, waar hij met ingang van 1 Sept. '13 vast benoemd werd en sindsdien niet alleen met onverflauwde ijver en toewijding, maar ook met grote opgewektheid en aanstekelijk enthousiasme onderwijs gaf in de wiskunde en de mechanica. Het laatste vak lag hem na aan het hart en het kostte hem grote moeite van zijn monopolie voor dat vak afstand te doen. Dat hij het toch deed, tekent hem als collega.

Zijn onderwijs stond op een hoog peil. Voor het vak beschrijvende meetkunde had hij zijn eigen weg gevonden door veel vroeger en consequenter dan gewoonlijk de methode van een niet loodrecht op de as staand derde projectievlak in te voeren. Dit gaf zijn leerlingen op het eindexamen dikwijls een belangrijke voorsprong. Vooral de

betere leerlingen spreken met veel waardering over het onderwijs van den heer Oosterbaan. Hij wist hen te boeien door op verrassende wijze van menig probleem een fraaie oplossing te geven.

Zijn belangstelling ging veel verder dan zijn vak. Hij was jaren lang lid van de commissie van toezicht op het L.O. en had zitting in het bestuur van de openbare leeszaal, aan welke laatste functie zijn grote belangstelling voor de nieuwere literatuur wel niet vreemd zal zijn geweest. Ook met het oorlogsgebeuren leefde hij intens mee. Hij stond bekend als goed vaderlander en ook de bezetter wist dat blijkbaar. Om een reden, die nooit opgehelderd is, werd hij op een kwade ochtend in Dec. '44 door de S.D. uit de school gehaald, en met zijn oudste zoon weggevoerd. Zij hebben hun huis niet weergezien. Na een periode van onzekerheid kwam op 3 September het ontroerende bericht, dat collega Oosterbaan op 21 Februari in het concentratiekamp Neuengamme overleden was, en zijn zoon op 24 Februari. Voor de school betekent het verlies van Oosterbaan een wezenlijke verarming. Hij was een van haar meest typerende exponenten. Wat het verlies voor zijn gezin betekent is niet te peilen. Wij herdenken hem hier met warme toegenegenheid en met dankbaarheid voor wat hij als vriend en collega geweest is.

Apeldoorn, 12 September 1945. M. A. TAAL.

J. MOSSEL.



Tot degenen, die niet uit Duitsland terugkeerden behoort o.m. collega J. Mossel, in leven leraar aan de R.H.B.S. te Alkmaar.

Josef Mossel werd den 16den October 1897 te Amsterdam geboren. Hij bezocht aldaar het Gymnasium, waar hij tot de begaafdste leerlingen behoorde. Reeds vroeg tot zelfstandig studeren in staat zijnde, wist hij na slechts vijf klassen te hebben doorlopen een uitstekend eindexamen af te leggen.

Daarna begon hij zijn studiën in de Wis- en Natuurkunde aan de Gemeentelijke Universiteit van Amsterdam.

In verband met het toenmalige tekort aan bevoegde leerkrachten werd hij kort na zijn candidaatsexamen met ingang van 1 September 1920 benoemd als tijdelijk leraar aan de R.H.B.S. te Alkmaar tot het geven van lessen in Wiskunde en Natuurkunde.

Door zijn veelzijdige belangstelling, o.m. voor de klassieken, waarvoor hij grote bewondering had, de geschiedenis

van het Joodse volk, Hebreeuws, waarvan hij een grondige studie maakte, deed hij eerst in October 1927 zijn doctoraal-examen, waarna op 1 Januari 1928 zijn vaste benoeming volgde als leraar speciaal voor de Wiskunde.

Sindsdien was hij onafgebroken in Alkmaar werkzaam tot de fatale datum in November 1940, waarop hij als Joods leraar het onderwijs moest verlaten.

Als overtuigd Zionist maakte hij met zijn vrouw enige jaren voor de oorlog een reis naar Palestina, het land, waar hij zich mettertijd hoopte te vestigen.

Dat deze plannen niet verwezenlijkt werden, vindt zeer waarschijnlijk zijn oorzaak in zijn grote gehechtheid aan zijn geboortestad. Al woonde hij in Alkmaar en later in Heilo, Amsterdammer bleef hij in hart en nieren.

Na zijn ontslag werd hij genoodzaakt zich naar Amsterdam te begeven, werd daar bij een der razzia's opgepakt en naar Westerbork overgebracht, van waaruit hij met zijn gezin naar Duitsland werd gevoerd naar het beruchte kamp Bergen-Belsen.

Blijkens getuigenis van zijn broer is hij daar de 29ste Maart 1945 van uitputting gestorven.

Als leraar wist hij, door zijn heldere betoogtrant en grote zin voor humor, zijn lessen zeer aantrekkelijk te maken. Hij genoot dan ook de sympathie van zijn leerlingen, hetgeen bij zijn gedwongen vertrek uit de school op ondubbelzinnige wijze tot uiting kwam.

Zij, die gedurende vele jaren met hem samenwerkten, behouden de herinnering aan een zeer gewaardeerd collega, die van velen hunner een goede vriend was.

J. VAN DEN BERG.

Dr. M. J. BELINFANTE.

Evenals zoovele anderen is ook collega Belinfante niet teruggekeerd uit de poel van ellende, waarin hij einde 1943 werd ondergedompeld door een even meedoogenloos als onbetrouwbaar regime.

Belinfante heeft meer kansen gehad om zich in veiligheid te stellen dan menig ander, want als Portugeesch Israëliet genoot hij zóó lang een voorkeurspositie, dat hij ruimschoots de tijd had gehad om zijn verdwijning deugdelijk voor te bereiden. Maar Belinfante was er de man niet naar. Zelf in alle opzichten voor honderd procent correct en betrouwbaar, kostte het hem moeite — zelfs in dit geval — gedane toezeggingen te wantrouwen. Raadgevingen van bevriende zijden richtten niets uit: hij bleef bij zijn besluit en sprak er alleen maar over, dat anderen het zooveel minder hadden dan hij. Hij wilde zelfs nog helpen! Een groot kind, maar tevens eèn groot man!

Ook op wetenschappelijk gebied ontwikkelde Belinfante voortreffelijke kwaliteiten, speciaal op het gebied der intuïtionistische wiskunde. Daarvan getuigt niet alleen zijn proefschrift, maar getuigen ook zijn vele publicaties in binnen- en buitenlandsche tijdschriften.

Wij verliezen in Belinfante een groot geleerde, een man van karakter en een goed collega.

Dr. M. EUWE.

OPROEP.

Eindelijk dan is het juk der slavernij van ons afgenomen. We kunnen weer ons zelf zijn, niet geknecht door beulen en door hen, die maar al te gewillig, enkelen zelfs met veel ijver, hand- en spandiensten voor de onderdrukkers verrichtten; de namen van deze laatsten wensen wij niet te kennen; die leden uit ons corps hebben afgedaan.

Maar wel moeten we weten, wie er in de nacht, die 5 jaar duurde, wredelijk werden vermoord. Wij verzoeken U allen, lezers, ons hun namen mede te delen met vermelding van het ambt, dat zij bekleedden en van de school, waaraan zij werkten, zo mogelijk met de datum van hun gewelddadige dood.

Er zijn er, van wie men die datum weet; er zijn er, van wie men hem nooit zal weten: van hen, die werden weggevoerd en die niet terugkwamen. We verzoeken opgaven van de leraren in de exacte wetenschappen aan H.B.S., Gymnasium of Lyceum en wat de oorzaak van hun verscheiden uit het leven betreft, mede door bombardementen en door ellende, doorstaan door opjagen uit hun huis.

Beleefd doch dringend verzoeken wij U allen aan deze oproep gehoor te geven en ons de namen en de gegevens te verstrekken. We zouden het zeer op prijs stellen, als deze ons voor 1 Febr. 1946 werden toegezonden.

Sept. 1945. De redactie.

EEN NIEUWE RUBRIEK.

Te beginnen met de 17e jaargang 1940/41 is „Euclides” het orgaan geworden van de groep Leraren in Wiskunde en Natuurwetenschappen van het Genootschap van Leraren aan Nederlandse Gymnasiën en Lycea (L.i.W.e.N.a.G.e.L.) en van de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan H.B.S. en Lycea (Wi Me Cos).

De tijd was er tot heden, Mei 1945, niet naar om gevolg te geven aan ons voornemen naast de stukken, die de leden en zovele anderen schreven, ook aandacht te besteden aan de leden zelf; aan hun komen en gaan, aan hun arbeid en succes. Een rubriek, die tot titel zou kunnen hebben „Personalia”, indien dit niet zo'n foei-lelijk woord was; te weten:

benoeming aan een school, afscheid van de school, overlijden, benoeming tot directeur, tot inspecteur, tot professor, opneming in de onderwijsraad, erkenning van verdienste door Koninklijke onderscheiding, promotie op proefschrift over . . . . ., enz. enz. Uiteraard zijn we voor deze rubriek volkomen afhankelijk van de leden van bovengenoemde verenigingen en van andere trouwe lezers van Euclides. Beleefd doch dringend verzoeken wij allen ons de gegevens te verstrekken; men denke toch vooral niet: „een ander zal het wel doen”; beter, dat we ze dubbel krijgen dan helemaal niet. De inzenders mogen aan de blote mededeling een en ander toevoegen; b.v. een halve bladzijde wijden aan een leraar, die afscheid neemt van de school na lange jaren trouwe dienst; aan een jongen geleerde, die op zijn 23e promoveerde en na twee jaar leraar geweest te zijn, geroepen wordt de leerstoel van professor N. te bezetten, van de gelukkige keuze, directeur zo en zo een inspectie te zien toebedeeld.

De bedoeling is, hoop ik, duidelijk; wie doet ons echter een juiste benaming voor deze rubriek aan de hand; personalia is lelijk; wat dan?

Mei 1945. De redactie.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA.

I. EEN n-HOEK IS DOOR $2n$—3 GEGEVENS BEPAALD.

De hierboven genoemde stelling wordt in de leerboeken der vlakke meetkunde veelal op de volgende wijze bewezen. Men trekt de (n—3) diagonalen uit één der hoekpunten, waardoor de veelhoek in (n—2) driehoeken verdeeld wordt. De redenering is dan deze. Voor de constructie van de eerste driehoek zijn drie gegevens nodig. Is deze driehoek gevonden, dan is van de tweede driehoek één zijde bekend. Ook de tweede driehoek is door drie gegevens bepaald; naast de gegeven zijde moet men dus nog over $3 - 1 = 2$ andere gegevens beschikken. Ook elke volgende driehoek vraagt twee nieuwe gegevens. Het totale aantal is dus $3 + (n-3) . 2 = 2n-3$.

Dit bewijs is niet correct, ook afgezien van de moeilijkheden, die aan de begrippen „een gegeven" en „een figuur bepalen" verbonden zijn. Bij de redenering heeft nl. een verwarring plaats tussen de twee betekenissen, die men in de elementaire meetkunde aan de uitdrukking „deze figuur is bepaald door g gegevens" pleegt te hechten. Wanneer men zegt, dat een driehoek door drie gegevens bepaald is en ook dat een cirkel door drie gegevens bepaald is, dan zijn dat onvergelijkbare uitspraken. Immers in het eerste geval ziet men geheel af van de plaats, die de figuur in het vlak inneemt, richt alleen zijn aandacht op de eigenschappen, die bij een plaatsverandering invariant blijven en beschouwt onderling congruente driehoeken als „dezelfde" oplossing der constructieopgave. In het tweede geval is bedoeld, dat niet alleen de afmetingen van de cirkel, maar ook zijn plaats door de drie gegevens volkomen is vastgelegd. Bij het onderwijs geeft het weglaten van de onderscheiding tussen de beide soorten opgaven, zoals dat gemakshalve zeer dikwijls plaats vindt, over het algemeen weinig moeilijkheden, omdat uit het verband de bedoeling meestal wel duidelijk is. Toch zou het misschien raadzaam zijn om op het onderscheid wat meer de aandacht der leerlingen te vestigen dan gebruikelijk schijnt. De redactie der opgave moet met grote zorgvuldigheid verricht worden; een kleine wijziging in de tekst doet de opgave verglijden van de ene categorie

naar de andere. Wordt de constructie verlangd van een driehoek waarvan de basis, de tophoek en de hoogte gegeven zijn, dan is waarschijnlijk een opgave van de eerste categorie bedoeld; vraagt men met een gegeven lijn tot basis een driehoek te construeren, die nog een gegeven tophoek en een gegeven hoogte bezit, dan ligt vermoedelijk een opgave van de tweede soort voor ons. De uitvoering van de constructie verloopt in beide gevallen op dezelfde wijze, maar dat wij met verschillende opgaven te doen hebben blijkt uit de discussie: in het eerste geval is het aantal oplossingen hoogstens één. in het tweede hoogstens vier.

Wij zijn in het wiskunde-onderwijs tegenwoordig zorgvuldiger en nauwkeuriger dan enige decennia geleden, besteden meer tijd aan zuivere redactie en streven naar een betere nomenclatuur. Men behoeft niet blind te zijn voor de nadelen, welke een overdreven aandacht voor de vorm met zich brengt om te besluiten, dat een scherpere onderscheiding van de twee soorten constructieopgaven wenselijk is. In de stelling, die ons bezig houdt, is het verwaarlozen van deze onderscheiding oorzaak van een redenering die men niet anders dan onjuist kan noemen. De constructie van de n-hoek is bedoeld ongeacht zijn plaats in het vlak; de eerste driehoek kan dus in willekeurige stand worden geconstrueerd en eist inderdaad drie gegevens. Bij de tweede en bij de volgende driehoeken hebben wij echter met constructieopgaven te doen, welke ten duidelijkste tot de tweede categorie behoren. Daarbij is een driehoek bepaald door zes gegevens; van zo'n driehoek zijn twee hoekpunten reeds bekend, die elk twee gegevens vertegenwoordigen. Het aantal voor de tweede driehoek nodige nieuwe gegevens bedraagt dus inderdaad twee, maar dit geval ontstaat, als het verschil van zes en vier en niet als dat van drie en één.

Men kan natuurlijk tot de formule $2n-3$ eenvoudiger komen door de overweging, dat een punt in het vlak door twee gegevens en dus een n-hoek door $2n$ gegevens bepaald is, terwijl het aantal verplaatsingen ∞^3 bedraagt, waarbij dan nog opgemerkt moet worden, dat er niet (zoals bijv. in het geval van de rechte of de cirkel) oneindig veel verplaatsingen zijn, waarvoor de n-hoek invariant is. Dit bewijs is echter voor de betrokken leerlingen, althans in het stadium, waarin zij verkeren, als zij voor het eerst met de stelling kennis maken, misschien minder geschikt.

Stelt men zich op het standpunt, dat men een figuur wil construeren niet alleen onafhankelijk van haar plaats in het vlak, maar ook onafhankelijk van haar grootte, dus beschouwt men onderling gelijkvormige figuren als „dezelfde", dan is het aantal gegevens, dat

een n-hoek bepaalt, blijkbaar $2n - 4$, omdat er in het vlak ∞^4 gelijkvormigheidstransformaties bestaan. De eerste driehoek eist twee gegevens, de volgenden elk $6 - 4 = 2$. Het gesignaleerde bewijs zou voor dit geval geheel mislukken en deze opmerking kan er misschien toe bijdragen om in te zien, dat het inderdaad incorrect is.

II. KRACHTLIJN EN BAANKROMME.

Bij het onderwijs in de natuurkunde aan onze middelbare scholen wordt de nodige aandacht gewijd aan het *krachtveld*, waarbij als voorbeelden het zwaarteveld, het magnetische veld en het electrische veld optreden en de daarbij voorkomende begrippen worden besproken. Dan komt ook de *krachtlijn* aan de orde, die in de regel gedefinieerd wordt als een (in het algemeen kromme) lijn, die de eigenschap heeft, dat de raaklijn in elk punt er van samenvalt met de werklijn van de veldsterkte in dat punt. Daarnaast komt dan soms, blijkbaar zogenaamd ter verduidelijking, een redenering voor over de beweging in het veld, welke redenering volstrekt in strijd is met de beginselen der mechanica. Zo lezen wij in een uitstekend en veel gebruikt leerboek, [1]) nadat de krachtlijn in een magnetisch veld op bovengenoemde wijze gedefinieerd is, de volgende alinea:

„Wanneer we ons in een punt A van één der krachtlijnen een volkomen vrij bewegelijk noordpooltje geplaatst denken, hoe zal dat dan gaan bewegen? Het zal elk ogenblik bewegen in de richting van de kracht, die er op werkt, d.w.z. het zal de krachtlijn ABC beschrijven, want dan valt de bewegingsrichting in elk punt der baan (d.i. de raaklijn in dat punt) samen met de kracht in dat punt (ook langs de raaklijn gericht). Vandaar dat men ook wel zegt: krachtlijnen zijn de banen, die door een vrij bewegelijk noordpooltje beschreven zouden worden. Welke der krachtlijnen het zou beschrijven, hangt af van het uitgangspunt.”

Wij weten allen, en Schogt heeft er indertijd in dit tijdschrift nog eens de aandacht op gevestigd, dat in de leerboeken der natuurkunde de verzorging van de hoofdstukken over mechanica dikwijls zeer veel te wensen overlaat en dat het ontwikkelen der fundamentele begrippen vaak oppervlakkig en slordig plaats vinden. De bovengenoemde passage (en overeenkomstige in andere leerboeken) roept om een ernstiger disqualificatie. Hier wordt het beginsel der traag-

---

[1]) Doornenbal en Nijhoff, Leerboek der Natuurkunde III, (1936), pg. 15.

heid volstrekt verloochend en met voorbijzien van een verschijnsel als centripetale versnelling de bewering uitgesproken, dat niet de kracht en de versnelling, maar de kracht en de snelheid door evenredige vectoren worden voorgesteld. Het citaat bewijst niet, dat de schrijvers het beginsel der inertie niet kennen; het vermoeden van het tegendeel wordt bevestigd door het feit, dat zij ook een leerboek der mechanica hebben geschreven van goede hoedanigheid. Het bewijst wel, dat men in de physica niet de zorgvuldigheid van formulering nastreeft en waarschijnlijk ook niet nastreven kan, die een kenmerk is van de mathematische werkwijze. Het kan dienst doen als een anti-propagandistisch argument ten aanzien van de stroming, die onder de zinspreuk „concentratie" beoogt de mechanica van de H.B.S. bij de natuurkunde „onder te brengen".

Een in het punt A van een krachtveld geplaatst deeltje zal natuurlijk bij zijn beweging de door A gaande krachtlijn K(A) (tenzij deze een rechte lijn is) *niet* volgen, maar onmiddellijk daarvan afwijken en wel (wij beperken ons tot een *vlak* krachtveld) aan de convexe zijde van K(A). De door het deeltje beschreven *baankromme* B(A) heeft in A dezelfde raaklijn als K(A), maar bezit daar ter plaatse klaarblijkelijk een kleinere *kromming*. Kasner [1]) heeft de merkwaardige stelling uitgesproken, dat de kromming van B(A) in A gelijk is aan $^1/_3$ van de kromming van K(A) in A en wel onafhankelijk van de aard van het krachtveld, ook onafhankelijk van de omstandigheid, dat het veld al of niet conservatief is. Hij bewijst zijn stelling door uit de bewegingsvergelijkingen de tijd te elimineren, waardoor hij de differentiaalvergelijking (van de derde orde) verkrijgt, van welke het systeem der baankrommen de oplossing is. Wij willen op dit bewijs niet nader ingaan, maar de stelling illustreren door een voorbeeld, waarbij zorg is gedragen, dat zowel de krachtlijnen als de baankrommen door eenvoudige vergelijkingen worden voorgesteld. De massa van het stoffelijk punt zij gelijk 1, terwijl de componenten van de kracht t.o. van een rechthoekig assenstelsel luiden

$$K_x = y,\ K_y = -x \quad \ldots\ldots\ (1)$$

zodat de bewegingsvergelijkingen zijn

$$\ddot{x} = y,\ \ddot{y} = -x \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Uit (1) blijkt, dat de *krachtlijnen* van het veld de *cirkels om de oorsprong* zijn, welke in wijzerrichting worden doorlopen.

---

1) Kasner, The trajectories of dynamics, Transact, Americ. Math. Soc. 7, 401—424, (1906).

Het stelsel differentiaalvergelijkingen (2) kan gemakkelijk worden geïntegreerd. Stelt men

$$x = Ae^{pt}$$
$$y = Be^{pt}$$

dan vindt men $\quad p^2A = B,\ p^2B = -A,$

waaruit volgt $\quad p^4 = -1,$

zodat men als algemene oplossing van (2) vindt

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t} + A_3e^{p_3t} + A_4e^{p_4t} \\ y &= iA_1e^{p_1t} + iA_2e^{p_2t} - iA_3e^{p_3t} - iA_4e^{p_4t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

waarbij

$$\left.\begin{aligned} p_1 = -p_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i),\ p_3 = -p_4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-i), \\ p_1{}^2 = p_2{}^2 = i,\ p_3{}^2 = p_4{}^2 = -i. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wij plaatsen nu het stoffelijk punt zonder beginsnelheid in $(0, a)$. Dan luiden de beginvoorwaarden voor $t = 0$:

$$x = 0,\ y = a,\ \dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0,$$

dus

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 0 \\ A_1 + A_2 - A_3 - A_4 &= -ai \\ p_1A_1 + p_2A_2 + p_3A_3 + p_4A_4 &= 0 \\ p_1A_1 + p_2A_2 - p_3A_3 - p_4A_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

waaruit volgt

$$A_1 = A_2 = -A_3 = -A_4 = -\tfrac{1}{4}ai \quad \ldots \quad (6)$$

zodat de vergelijkingen der baankromme luiden

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{4}ai\,(e^{p_1t} + e^{p_2t} - e^{p_3t} - e^{p_4t}) \\ y &= \tfrac{1}{4}a(e^{p_1t} + e^{p_2t} + e^{p_3t} + e^{p_4t}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

wat bij ontwikkeling naar t volgens

$$e^{pt} = 1 + pt + \frac{p^2t^2}{2} + \frac{p^3t^3}{6} + \ldots$$

overgaat in

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}at^2 + \ldots \\ y &= a - \tfrac{1}{24}at^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

zodat de baankromme zich in de buurt van het punt $(0, a)$ gedraagt als de parabool

$$y - a = -\frac{1}{6a}x^2.$$

Voor $x = 0$ is $\dfrac{dy}{dx} = 0,\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{3a}$, zodat de kromming in het beginpunt gelijk is aan $\dfrac{1}{3a}$, d.w.z. *gelijk aan $^1/_3$ van de kromming van de krachtlijn.*

MAKROKOSMOS EN MIKROKOSMOS.

Inleiding.

Reeds vaak is er in populaire boeken en artikelen geschreven over afmetingen en andere grootheden in de wereld der sterren (makrokosmos), en eveneens over de grootheden, die de verschijnselen meten in de wereld van het atoom (mikrokosmos). Zelden echter vindt men een directe vergelijking tusschen overeenkomstige grootheden in de wereld der sterren en die van het atoom. In dit artikel zal ik in het kort een dergelijk vergelijkend overzicht geven. Beide werelden, de makrokosmos en de mikrokosmos, zullen in hun onderdeelen vergeleken worden, wat betreft grootte, afmetingen, snelheden, massa's, volumina en dichtheden. Het zal nu en dan een verzameling van getallen en tabellen worden, die, hoe prozaïsch ze in veler oogen ook mogen zijn, toch het eenige middel vormen om een helder overzicht te geven van de dimensies in beide werelden. Om het artikel niet onnoodig lang te maken zal de toelichtende tekst kort gehouden worden.

Grootte en afmetingen.

Laten wij bij een helderen sterrenhemel onze oogen over het uitspansel rondgaan, dan zien we ongeveer twee duizend sterren, die onregelmatig over het zichtbare halfrond verdeeld zijn. Verder zien we een lichtenden band, melkweg genoemd, waarover het ongewapend oog ons geen nadere bijzonderheden kan leeren. Met een kijker wordt het aantal zichtbare sterren vele malen grooter. Ook de melkweg blijkt dan een verzameling van sterren te zijn. Andere lichtgevende objecten, die zich in gewone kijkers als nevelvlekjes voordoen, blijken in de allergrootste telescopen dikwijls in sterren opgelost te kunnen worden. Men krijgt den indruk, dat de geheele kosmos bestaat uit afzonderlijke individuën, die we sterren noemen, maar ook, dat deze individuën weer tot grootere gemeenschappen behooren als de z.g. sterrenhoopen en nevels. Van deze nevels zijn er ong. 100 millioen bekend. Ze hebben een diameter van de orde van 100 000 lichtjaar. De meeste (ong. 70 %) hebben den vorm van een platte schijf, waaruit twee spiraalvormige armen ontspringen, en die daarom spiraalnevels worden genoemd. Ieder van deze „extra-

galactische nevels" bevat milliarden van sterren, of tenminste materie voor milliarden sterren, indien hun ontwikkeling nog niet zoover is voortgeschreden, dat uit de oermaterie de afzonderlijke individuën zich hebben afgescheiden. Stellen we het aantal van deze nevels, waarvan ons melkwegstelsel er een is, op 100 millioen, terwijl ieder 10 milliard sterren bevat, dan komen we op een totaal van 1 trillioen sterren in het ons bekende heelal.

Onze spiraalnevel, de melkweg, heeft een totale massa, die gelijk is aan ongeveer 150 milliard maal de massa van de zon. Een gedeelte van deze massa zit opgehoopt in een honderdtal bolvormige sterrenhoopen, die ons sterrenstelsel begrenzen, en die naar schatting ieder wel een half millioen sterren bevatten. Verder behooren tot ons melkwegstelsel lichtgevende nevels als de Orionnevel (d.z. wolken van geïoniseerde waterstof, zuurstof en stikstof) en eveneens donkere nevels. Beide soorten zijn verschijningsvormen van een ijle kosmische wolk, die overal tusschen de sterren aanwezig is en die bestaat uit gassen en fijne stofdeeltjes. De zon staat in het vlak van het melkwegstelsel op een afstand van 30 000 lichtjaar van het centrum. De omgeving van de zon wordt locale sterrenwolk of Kapteyn-wolk genoemd naar den Nederlandschen sterrenkundige Kapteyn, die van de eigenbewegingen van de sterren in dit gebied vooral studie heeft gemaakt. Zij blijkt een grootere sterrendichtheid te hebben dan de rest van den spiraalnevel. Van de zon naar buiten neemt deze dichtheid af met toenemenden afstand tot de zon.

Alvorens over een en ander nadere getallen te geven zullen we eerst in het kort onze positie ten opzichte van de geheele sterrenwereld vastleggen. Van de ong. 100 millioen spiraalnevels die naar schatting in het bekende heelal bestaan, is ons melkwegstelsel er een. In dit stelsel, ver van het centrum verwijderd, is onze zon een van de vele milliarden sterren, die erin bestaan, een van de trillioenen sterren, die er in het bekende heelal zijn. Om de zon cirkelen negen planeten, waarvan de aarde een van de kleinste is. Op de aarde wonen ongeveer twee milliard menschen, een van deze zijn wij. Als we hierover nadenken, komen ons onwillekeurig de woorden van de H. Schrift voor den geest: Ps. 8, 9: „Wat is de mensch, dat Gij zijner gedenkt"; of Job 7, 17: „Wat is de mensch, dat Gij zijner verheerlijkt". Maar de mensch, die in al zijn kleinheid door zijn geestelijke vermogens dichter bij God staat dan de zuiver stoffelijke wereld, is er langzamerhand, voortbouwend op de resultaten van voorafgaande geslachten, in geslaagd de diepten van het heelal te peilen. Hij heeft weten door te dringen in de geheimen van de atoomwereld, en daardoor ook in die van de wereld der sterren.

Nietig is de mensch vergeleken met de ontzettend groote sterren, die met trillioenen geteld worden, en die zich op onderlinge afstanden bevinden, die in verhouding tot onze aardsche afstanden niet voor te stellen zijn. Maar aan den anderen kant van den mensch staat de wereld van het kleine, de wereld van de moleculen en atomen, de mikrokosmos. Ook hier aantallen, die met tientallen nullen geschreven worden, maar afmetingen, die onvoorstelbaar klein zijn. In normale omstandigheden van temperatuur en druk (0° C en 76 cm kwik) bevinden zich in 1 cm^3 gas 27 trillioen moleculen, dus ongeveer evenveel als er sterren zijn in het bekende heelal. Ieder molecuul bestaat weer uit meerdere atomen, ieder atoom is weer samengesteld uit kern en electronen. De atoomstralen zijn ongeveer 1 honderdmillioenste cm, de stralen van atoomkernen en electronen zijn van de orde van 1 tienbillioenste cm. Dit is de kleinste afmeting, die tot nu toe in het heelal gemeten is. In het volgende zal ik op den bouw van het atoom nader terug komen. Eerst wil ik echter in een grafiek de afmetingen vergelijken die in makro- en mikrokosmos voorkomen. (Zie pag. 22).

Atoom en zonnestelsel.

Na het ontstaan van de atoommodellen van Rutherford (1911) en Bohr (1913) is het atoom vaak vergeleken met het stelsel van zon en planeten. Volgens Rutherford zou het atoom nl. bestaan uit een positieve kern, waaromheen de negatieve electronen in cirkelvormige of ellipsvormige banen wentelen, zooals de planeten wentelen om de zon. De electronen worden in hun banen gehouden door electrische krachten, die werken volgens de wetten van Coulomb. Bohr gaat uit van hetzelfde grondmodel, maar gedwongen door de feiten stelt hij nieuwe electrodynamische wetten op volgens welke de beweging der deeltjes wordt geregeerd. De electronen kunnen volgens deze wetten slechts in zeer bepaalde banen om de kern bewegen.

Ofschoon dit overzichtelijk mechanisch model wel dienstig is voor het afleiden van velerlei eigenschappen van het atoom, kan het toch maar een zeer onvolmaakte voorstelling van de realiteit zijn. Daar het echter om zijn duidelijkheid nog veel gebruikt wordt zullen we in het volgende een vergelijking trekken tusschen dit atoommodel en het zonnestelsel.

Het zonnestelsel strekt zich van de zon als centrum uit tot de baan van Pluto. De straal van dit stelsel stellen we gelijk aan den afstand van de zon tot Pluto, d.i. 6 milliard km ($= 6 \times 10^{14}$ cm). In dit vlakke gebied bevinden zich de negen bekende planeten, verder

Tabel van afmetingen.

10^n cm	n	Stoffelijke wereld (Middellijnen)	Levende wezens	Golflengte der electro-magnetische golven	Afstand tot de zon (of aarde)
	27				Verste, nog waargenomen spiraalnevel
	26				
	25				
	24				Dichtstbijzijnde spiraalnevel
	23	Spiraalnevel			
	22				Sterren in ons melkwegstelsel (22 to 19)
	21				
	20				
	19				Dichtstbijzijnde ster
1 lj	18				
	17				
	16				
	15				
	14	Reuzenster			Planeten (14 to 13)
	13				
	12				
	11	Zon en meeste sterren			Afstand maan—aarde
	10	Planeten (10 to 9)		↑ (10 to −10)	
	9			Electrische golven	
	8				
	7				
	6			Radiogolven (6 to 3)	Hoogste berg op aarde
1 km	5		Mammouthboom		
	4				
	3		Walvisch		
1 m	2		Mensch		
1 dm	1		Vogels	Golven van Hertz (3 to −1)	
1 cm	0		Insecten		
1 mm	−1		Wateramoeben		
	−2		Infusoriën		
	−3		Tuberkelbacil	Infrarood (−2 to −4)	
1 μ	−4			Zichtb. licht	
	−5		Virus	Ultraviolet (−4 to −6)	
	−6	Eitwitmolecule			
	−7	Atomen			
1 A	−8			Röntgen- en γ-stralen (−7 to −10)	
	−9				
	−10			↓	
	−11	Atoomkern, Proton, Neutron, Electron (−11 to −13)			
	−12				
	−13				
	−14				

TOELICHTING BIJ DE TABEL.

1. De schaal is logarithmisch en uitgedrukt in de cm als lengteëenheid. De getallen n stellen dus voor 10^n cm. Een lichtjaar (afgekort tot lj; de weg die door het licht in één jaar wordt afgelegd) is gelijk aan 9,46 $\times$ 10^{12} km, dus ongeveer 10 billioen km of 10^{18} cm. In de tabel is het lichtjaar hieraan gelijkgesteld.

2. In de eerste kolom zijn de afmetingen (middellijnen) gegeven van levenlooze objecten; in de tweede kolom ter vergelijking de grootste afmeting van enkele levende objecten. De derde kolom geeft de golflengte

een paar duizend planetoïden en een groot aantal kometen. De straal van de zon bedraagt 700 000 km, het volume dus $14,5 \times 10^{17}$ km^3 (ong. $1,5 \times 10^{33}$ cm^3), de massa van de zon 2×10^{27} ton ($= 2 \times 10^{33}$ g). De totale massa van de planeten, planetoïden en kometen bedraagt minder dan $\frac{1,5}{1000}$ maal de massa van de zon, het totale volume van planeten en planetoïden minder dan $\frac{1,7}{1000}$ maal het volume van de zon. Massa en volume van de leden van ons zonnestelsel zijn dus bij een globaal overzicht te verwaarloozen ten opzichte van massa en volume van de zon. Het volume van het heele zonnestelsel, als een bol gedacht met bovengenoemden straal, bedraagt 9×10^{44} cm^3. Het volume van zon en planeten, etc. is niet meer dan $1,6 \times 10^{-12}$, dus minder dan 2 billioenste van het volume van het heele zonnestelsel. Indien men de gezamenlijke materie van de leden van het zonnestelsel gelijkmatig over deze ruimte zou verspreiden, zou men een gemiddelde massadichtheid krijgen van 2.2×10^{-12} g/cm^3, terwijl de gemiddelde dichtheid van de zon 1,4 g/cm^3 bedraagt. Van de planeten heeft de aarde de grootste dichtheid, nl. 5,5 en Saturnus de kleinste, nl. 0,7.

Bij het atoom is het met de verdeeling van massa en volume een beetje anders gesteld. Den straal van het atoom kunnen we stellen op 1 à 2 Å, dus 1 à 2 $\times 10^{-8}$ cm. De straal van de atoomkern bedraagt, zooals uit experimenteele en theoretische gegevens blijkt, ong. $1,8 \times 10^{-13}\sqrt[3]{A}$ cm, waarin A het atoomgewicht voorstelt, zoodat de stralen van de atomen vanaf waterstof (met atoomgewicht 1) tot uraan (met atoomgewicht 238) uiteenloopen van 1,8 tot $11,3 \times 10^{-13}$ cm. De klassieke electronenstraal bedraagt $2,8 \times 10^{-13}$ cm. Het centrale deel van het atoom, de atoomkern, heeft dus ongeveer hetzelfde volume als de andere bestanddeelen — een groot verschil dus met de volumeverhoudingen in het zonnestelsel. Het volume van de atoombestanddeelen bedraagt bij helium $2,5 \times 10^{-14}$, bij uraan $4,5 \times 10^{-13}$-maal het atoomvolume. De „leegte" in het atoom is dus nog veel grooter dan in het zonnestelsel.

---

van de electromagnetische golven. In de vierde kolom ten slotte zijn de afstanden aangegeven van enkele kosmische objecten tot de zon (of aarde).

3. Uit de beschouwing van de eerste kolom blijkt, dat de mensch, wat zijn grootte betreft, vrijwel in het midden staat tusschen het uiterst groote en uiterst kleine, iets aan den kleinen kant. Een beter (meetkundig) gemiddelde is de kilometer. De grootste afmeting die een kosmisch object heeft, (de middellijn van ons melkwegstelsel en van vele spiraalnevels) bedraagt 100 000 lichtjaar of 1 trillioen km, terwijl de middellijn van een proton of electron ongeveer 1 trillioenste km bedraagt.

De gemiddelde massadichtheid bedraagt in het heliumatoom ong. 1, in het xenonatoom 5 en in het uraanatoom, als we den straal hiervan aannemen op 2 Å, 12 g/cm³. De dichtheid van het electron bedraagt echter 10^{10}, die van de atoomkern zelfs 7×10^{13} g/cm³. Evenals in het zonnestelsel bevindt zich de massa van het atoom bijna geheel in de kern. De massa van een electron is $\frac{1}{1835}$ deel van de eenheid van atoomgewicht (d.i. het gewicht van de waterstofkern). In onze beschouwingen kunnen we het gezamenlijke gewicht van de „planeet"-electronen in het atoom dus steeds verwaarloozen ten opzichte van het gewicht van de atoomkern.

Het bovenstaande wordt nog nader verduidelijkt door het volgende overzicht.

Zonnestelsel	Atoom
Straal: zonnestelsel 6×10^{14} cm	Straal: atoom 1 à 2×10^{-8} cm
zon 7×10^{10} cm	atoomkern 1,8 à $11,3 \times 10^{-13}$ cm
planeten 2,4 à 70×10^{8} cm	electron $2,8 \times 10^{-13}$ cm
$\frac{\text{Volume deelen}}{\text{Totaal volume}}$ $1,6 \times 10^{-12}$	$\frac{\text{Volume deelen}}{\text{Totaal volume}}$ 2,5 à 45×10^{-14}
Volume deelen < 1,7/1000 volume zon	Volume electron $\approx$ volume kern
Massa: zon 2×10^{33} g	Massa: atoomkern 1,66 à 400×10^{-24} g
	electron 9×10^{-28} g
Gem. dichtheid: zon 1,4 g/cm³	Gem. dichtheid: atoomkern 7×10^{13} g/cm³
planeten 0,7 à 5,5	electron 10^{10}
zonnestelsel $2,2 \times 10^{-12}$.	electronenwolk 2,4 à 100×10^{-4}
	vrij-atoom 0,9 (He) à 12 (U)

Om de grootte-verhoudingen in ons zonnestelsel en in het atoom nog beter te kunnen vergelijken, zullen we beide op dezelfde schaal herleiden en wel van beide een model maken, dat ongeveer het volume van de aarde heeft. Om een gemakkelijke schaal te krijgen, maken we een bol met een straal van 6000 km $= 6 \times 10^{8}$ cm (de straal van de aarde is 6370 km).

1. Voor het zonnestelsel krijgen we dan: straal van het zonnestelsel $= 6 \times 10^{14}$ cm wordt 6×10^{8} cm, dus schaal $10^{6} : 1$. De zon wordt dan een bol met 700 m straal, de aarde een bol met een straal van 6,4 m. Jupiter krijgt een straal van 70 m, terwijl de andere planeten stralen krijgen van 2,4 tot 60 m. De maan wordt een bol met straal van 1,7 m, terwijl de planetoïden stralen krijgen, varieerend van 1 mm tot 70 cm.

2. Het atoom, waarvan we den straal aannemen op $1,2 \times 10^{-8}$

cm, wordt in het nieuwe model een bol met een straal van 6×10^8 cm, dus schaal $1 : 5 \times 10^{16}$. De atoomkernen met stralen van 2 tot 11×10^{-13} cm worden dan bollen met stralen van 90 tot 550 m, de electronen worden bollen met een straal van 140 m.

Uit dit overzicht blijkt weer, dat slechts een klein gedeelte van de beschikbare ruimte bij het zonnestelsel door zon, planeten, etc. wordt ingenomen. Hetzelfde geldt voor het atoom, waar de ruimtevulling, resp. leegheid en ook de onderlinge grootte der deelen vergelijkbaar zijn met die in het zonnestelsel, tenminste als men atoomkern én electronen als bolletjes beschouwt met de genoemde stralen. In werkelijkheid gedragen zij zich als individueele deeltjes alleen, als zij zich vrij buiten het atoomverband kunnen bewegen. In het atoom vullen de electronen als het ware de geheele beschikbare ruimte op. Daarom spreekt men dan ook dikwijls van de „electronenwolk" van het atoom.

Zooals uit het voorgaande duidelijk is geworden, is de gemiddelde massadichtheid in het atoom geheel anders dan in het zonnestelsel. Terwijl deze in het zonnestelsel slechts ongeveer 2 billioenste gram per cm^3 bedraagt, is dit getal voor het vrij-atoom 1 tot 12 gram per cm^3. Dit laatste getal is zoo hoog door de allesovertreffende specifieke dichtheid van de atoomkern.

Ten slotte zullen we nog een vergelijking maken tusschen de snelheden, die voorkomen in het zonnestelsel en bij de planeetelectronen in het atoom. De baansnelheid van Mercurius bedraagt ongeveer 48 km/sec, die van de aarde 30 km/sec. Ze neemt af met toenemenden afstand tot de zon en bedraagt bij Pluto 3 km/sec. Houden we ons aan het mechanisch atoommiddel van Bohr, waaraan overigens, zooals boven reeds gezegd is, slechts een beperkte realiteitswaarde wordt toegekend, dan vindt men de baansnelheid van een electron bij een atoom met kernlading Z en voor een baan met hoofdquantumgetal n met behulp van de formule

$$v_n = \frac{2\pi Z e^2}{nh} = 22 \times 10^7 \frac{Z}{n} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 2200 \frac{Z}{n} \frac{\text{km}}{\text{sec}}.$$

Voor de banen met $n = 1$ krijgen we dan een snelheid van 2200 km/sec bij het waterstofatoom en een snelheid van 200 000 km/sec bij het uraanatoom. Het aantal omwentelingen per sec zou voor deze electronen resp. 7×10^{15} en 6×10^{19} bedragen.

Gaan we deze snelheden transponeeren in het model ter grootte van de aarde, dan zouden de snelheden van de planeten verkleind worden tot 4,8 à 0,5 cm/sec, terwijl de snelheden van de electronen worden vergroot tot 10^{25} à 10^{27} cm/sec. Dit zijn snelheden 1000 billioen maal zoo groot als de reeds formidabele lichtsnelheid.

Massavulling in het heelal.

Uit statistische peilingen in ons melkwegstelsel blijkt, dat de bevolkingsdichtheid der sterren afneemt, naarmate de afstand tot de zon grooter wordt. Het gebied om de zon is dus het dichtst bevolkte en toch is hier de leegte al ontzettend. We denken ons een bol met de zon als middelpunt en met een straal van 5 parsec, d.i. ong. 16,3 lichtjaar of 154 billioen km. (De parsec is een astronomische lengtemaat, die gelijk is aan 3,26 lichtjaar of $3{,}08 \times 10^{13}$ km.) In dit gebied van 18200 lj^3 of ong. 15×10^{42} km^3 bevinden zich, de zon meegeteld, 38 sterren, die nog waarneembaar zijn met de grootste kijkers. Daar er waarschijnlijk nog wel enkele zwakkere sterren zijn, zullen we het totale aantal sterren in dit gebied aannemen op 50. Iedere ster heeft dan voor zich een ruimte ter beschikking van 360 lj^3 of 3×10^{41} km^3, dus een kubus met een ribbe van 7 lichtjaar of 67 billioen km. Dit getal geeft dan tevens den gemiddelden afstand van de sterren in dit gebied. Nemen we aan dat de sterren een eigen snelheid hebben van 30 km/sec, en dat twee sterren met deze snelheid naar elkaar toe zouden bewegen volgens de verbindingslijn van de middelpunten, dan zou het ong. 100 000 jaar duren voordat beide met elkaar in botsing zouden komen. Er is voor een dergelijke catastrophe dus niet veel gevaar. Hier dringt zich een vergelijking op met de botsingskansen bij gasmoleculen. Bij 0° C en atmosferischen druk bedragen de snelheden der gasmoleculen enkele honderden meters per seconde, terwijl het aantal botsingen per seconde enkele milliarden bedraagt.

Nemen we aan, dat de 50 sterren in het gebied rondom de zon even zwaar zijn als de zon, dan vinden we voor de totale massa $50 \times 2 \times 10^{27}$ ton $= 10^{35}$ gram. Zou deze massa gelijkmatig over den bol met straal 5 parsec (of 16,3 lichtjaar) worden uitgespreid, dan zou de gemiddelde dichtheid $6{,}6 \times 10^{-24}$ g/cm^3 zijn, d.i. 6,6 gram in een kubus met een ribbe van 1000 km. De gem. massadichtheid van de kosmische stofwolk in ons melkwegstelsel bedraagt ook ong. 10^{-23} g/cm^3.

Geven we aan de 50 sterren ook hetzelfde volume als de zon, dan is het totale volume $50 \times 14{,}5 \times 10^{17}$ km^3, dit is het 5×10^{-24}-deel van het beschikbare volume, d.w.z. dat in een kubus met een ribbe van 1000 km slechts 5 cm^3 aan sterrematerie zou zijn. Dus weer een ontzettende leegte.

Naarmate de afstand tot de zon grooter wordt, wordt de ruimtevulling nog kleiner. Zoo is aan den rand van onze sterrenwolk de bevolkingsdichtheid ongeveer honderd maal zoo klein als in de buurt

van de zon. Nog grooter wordt de leegte buiten ons melkwegstelsel, in de z.g. metagalaxis. In dit gebied tot op een afstand van 10 millioen lichtjaar vindt men een object (extragalactische nevel) met een gewicht van 10 milliard zonnemassa's op een volume van 2×10^{57} km^3. Dit komt neer op een gemiddelde massadichtheid van 10^{-30} g/cm^3. Een dergelijke massadichtheid zou neerkomen op 1 millioenste gram in een kubus met een ribbe van 1000 km of 1 mg in een ruimte zoo groot als de aarde, of minder dan een waterstofatoom per m^3.

Ter vergelijking nog het volgende. Als we het beste vacuum, dat met moderne technische middelen bereikbaar is, stellen op 10^{-10} cm kwikdruk, dan bevat 1 cm^3 waterstof bij een dergelijken druk toch altijd nog 36×10^5 moleculen. Het best bereikbare vacuum bevat dus nog 10 billioen maal meer materie dan de wereldruimte, als de materie gelijkmatig zou worden uitgespreid.

Snelheden.

We zullen nu een overzicht geven van de velerlei snelheden, die in makro- en mikrokosmos voorkomen. Terwijl bij de zich vrij bewegende levende wezens alle kleine snelheden mogelijk zijn tot een bovengrens van enkele tientallen meters per seconde, worden in de levenlooze wereld veel grootere snelheden gevonden.

Bij gasmoleculen bedraagt onder normale omstandigheden (0° C en 76 cm kwikdruk) de gemiddelde snelheid enkele honderden meters per seconde; bij waterstof is deze snelheid het grootst en bedraagt ongeveer 1700 m/sec. De snelheden worden grooter bij hoogere temperaturen, zoodat bij een temperatuur van 4000° de snelheid van waterstofmoleculen ong. 100 km/sec zou bedragen en bij een temperatuur van 1 millioen graden, zooals ze in het inwendige van de sterren voorkomt, zelfs 17000 km/sec, maar in dergelijke extreme omstandigheden is de materie gedegenereerd en kan men moeilijk meer van moleculen en atomen spreken. In het inwendige der sterren bewegen de electronen met snelheden, die de lichtsnelheid nabij komen. Dergelijke hooge snelheden kunnen de electronen ook bereiken bij laboratoriumproeven, b.v. bij kathodestralen.

De snelheden der hemellichamen zijn in den regel niet hooger dan enkele tientallen km per sec. De baansnelheden der planeten liggen tusschen 48 en 3 km/sec, de snelheden der sterren bedragen in het algemeen enkele tientallen km/sec, bij enkele sterren komen echter snelheden voor van 500 tot 800 km/sec. Indien de roodverschuiving der spectraallijnen, die bij ver verwijderde objecten wordt waar-

genomen, werkelijk een maat is voor de radieele snelheden van ons af, zooals in de theorie van het uitdijend heelal wordt aangenomen, dan komen in het heelal snelheden voor, die tienduizenden km/sec bedragen. Deze vluchtsnelheden bedragen ong. 163 km/sec voor iedere millioen lichtjaar afstand (constante van Hubble). De grootste uit de roodverschuiving afgeleide radieele snelheid van een ver verwijderden spiraalnevel bedraagt 40 000 km/sec. Maar volgens velen moet deze roodverschuiving geheel of gedeeltelijk anders geïnterpreteerd worden. We zullen hier niet nader op ingaan.

Dichtheden.

In het vorige is reeds vaak de gemiddelde dichtheid van eenig makro- of mikrokosmisch object ter sprake gekomen. We zullen hier in tabellarischen vorm en zonder veel commentaar nog eens een kort overzicht geven van de voorkomende dichtheden. De getallen geven de dichtheden aan in gram per cm^3, dus uitgedrukt in de dichtheid van water als eenheid. Meestal geven de getallen slechts benaderde waarden van de gemiddelde dichtheden.

Tabel van dichtheden.

Heelal	10^{-30} g/cm^3
Kosmische stofwolk in ons melkwegstelsel	10^{-23}
Omgeving van de zon tot afstand van 5 parsec (16,3 lichtjaar)	10^{-23}
Zonnestelsel als bol gedacht . . .	2×10^{-12}
Roode reuzen (Betelgeuze)	10^{-6}
Electronenwolk bij atomen	10^{-4} tot 10^{-2}
Gassen onder normale omstandigheden	$0{,}09 \times 10^{-3}$ tot 13×10^{-3}
Zon (en meeste sterren)	1,4
Planeten	0,7 tot 5,5
Vloeistoffen en vaste stoffen op aarde	0,07 tot 22,5
Atomen	1 tot 12
Centrum van meeste sterren	100
Witte dwergen	10^6
Electronen	10^{10}
Kern van roode reuzen	10^{12} (?)
Atoomkernen	7×10^{13}

Voor ons, aardsche stervelingen, die in onze omgeving alleen dichtheden kennen, die varieeren tusschen 0,0001 en 25 g/cm^3, hebben de uiterste waarden van 10^{-30} en 10^{14}, die in bovengenoemd overzicht

de rij openen en sluiten, iets fantastisch, onvoorstelbaar als ze zijn in hun kleinheid, resp. grootheid. De gemiddelde dichtheid in het heelal komt overeen met 1 mg materie in een ruimte zoo groot als de aarde, de dichtheid van de atoomkern met een massa van 70 000 ton in 1 mm^3.

Groote getallen.

Of een getal, dat de *grootte* van een of andere grootheid uitdrukt, groot of klein is, hangt natuurlijk af van de gekozen eenheid. Zoo wordt de massa van de aarde in kilogram uitgedrukt door een getal van 25 cijfers (6×10^{24} kg) en de massa van de andere planeten door een getal van dezelfde grootte-orde. Neemt men echter de massa van de aarde als eenheid, dan zijn kleine getallen voldoende om de massa's der planeten aan te geven, nl. de massa van Mercurius is dan 0,03, die van Jupiter 317 en de massa van de zon 333400, dus nog een betrekkelijk klein getal.

Getallen, die de *dichtheid* van een object aangeven, zijn afhankelijk van de keuze van twee eenheden. Neemt men de gram als eenheid van massa en de cm^3 als eenheid van volume, dan is de dichtheid van de atoomkern 7×10^{13} en de gemiddelde dichtheid in de wereldruimte 10^{-30} g/cm^3. Zou men de mg als eenheid van massa kiezen en het volume van de aarde als eenheid van volume, dan zou de dichtheid in de wereldruimte gelijk zijn aan de eenheid, maar de dichtheid van de atoomkern aan 7×10^{43}.

Alleen een getal, dat een *aantal* individuën aangeeft, heeft een absolute beteekenis, onafhankelijk van de keuze van een eenheid. Als zoodanig zou men voor het heelal kunnen aangeven het totaal aantal neutronen of protonen. De massa van een proton of neutron bedraagt $1,66 \times 10^{-24}$ g. Eén gram stof bevat dus 6×10^{23} protonen of neutronen. We zien hier en in het volgende af van de massa van de electronen, daar deze voor de hier bedoelde nauwkeurigheid ten opzichte van de massa der protonen en neutronen kan verwaarloosd worden.

Stellen we het aantal sterrennevels op 100 millioen, terwijl ieder 10 milliard sterren bevat als onze zon, dan vinden we voor de totale massa 2×10^{51} g. Dit geeft een bedrag van 12×10^{74} protonen en neutronen. Schat men met sommige sterrenkundigen de wereldmassa op 2×10^{55} g, dan vindt men een totaalbedrag van 12×10^{78} of ong. 10^{79} protonen en neutronen. Dit zijn, afgezien van het speculatieve karakter van de beschouwingen over de wereldmassa, de eenige getallen, waaraan men een absolute beteekenis kan toekennen,

daar wegens de steeds geconstateerde constantheid van de natuurwetten in alle deelen van het heelal, gerust kan aangenomen worden, dat de massa in hoofdzaak bepaald wordt door het aantal protonen en neutronen.

Slotopmerking.

In het voorgaande is herhaaldelijk gewezen op de groote „leegte" in de wereld en in de samenstellende deelen. Toch moet dit niet zoo opgevat worden, alsof hier van een absoluut vacuum sprake zou zijn met hier en daar een materiedeeltje. Een dergelijke bewering zou physisch en wijsgeerig onhoudbaar zijn. Daar de geheele wereld een eenheid blijkt te vormen, waarin de deelen in voortdurende wisselwerking met elkaar zijn, moet er noodzakelijk een medium worden aangenomen, dat in de eerste plaats de locale relaties tusschen de deelen vastlegt, maar vervolgens ook een essentieele functie heeft te vervullen bij de overdracht van de diverse werkingen. Dit medium, dat men volgens het gebruik „aether" kan noemen, vormt de stoffelijke band tusschen de samenstellende deelen van het heelal en moet misschien als oermaterie worden beschouwd. Op dit aetherprobleem hoop ik te gelegener tijd uitvoerig terug te komen.

Roermond, April 1944. Dr P. H. VAN LAER.

HET LEERPLAN VOOR DE WISKUNDE OP DE H. B. S. (afd. B.)

door

Dr. H. STREEFKERK.

Het zij mij vergund, de volgende stelling uit te spreken en te verdedigen:

Het leerplan voor het onderwijs in de wiskunde aan de H. B. S. met 5-j. c. (afd. B), zoals dit in 1937 gewijzigd is, is, bij conscientieuze toepassing, zowel naar de omvang, als naar de inhoud, onuitvoerbaar [1]).

Ik weet, dat er leraren zijn, die met mij van mening verschillen. Zij menen, dat er tegenwoordig te veel leerlingen op de middelbare scholen gaan, dat het grote aantal vooral een gevolg is van onvoldoende selectie en dat daardoor het intellectuele peil der leerlingen te laag is, om het (h.i. niet te zware) programma in de gestelde tijd af te werken.

Zonder het met het eerste gedeelte van deze uitspraak oneens te zijn, merk ik ten opzichte van het tweede gedeelte op:

1⁰. De beruchte wiskundevrees en -haat stammen niet uit *deze* tijd, maar uit de tijd, toen het euvel van te veel leerlingen er nog niet was. Men vrage er de oudere mensen eens naar! Zij vertellen U, dat de prestaties van den gemiddelden toenmaligen leerling ook toen al slecht waren. Het onderwijs werd ook toen veelal slechts met vrucht gevolgd door een kleine minderheid der klasse; voor de rest was het onderwijs in de wiskunde een zaak van veronachtzaming of van lijden of van haat.

2⁰. Zelfs een strenge selectie kan niet veel verbetering brengen. Men zal toch de vele begaafde leerlingen, wier begaafdheden in andere richting liggen, en die in de wiskunde nooit anders dan middelmatige prestaties kunnen leveren, niet weg willen selecteren? Van hoevele latere geleerden is niet bekend, dat zij in hun jeugd in de wiskunde niets gepresteerd hebben?

3⁰. Het is waarlijk geen kunst om wiskundig begaafde leerlingen in snel tempo vele zaken te leren. Daar zijn zelfs in 't geheel geen leraren voor nodig: ze leren het zich zelf wel. Het is de taak der

---

[1]) Hiermee wil ik geenszins zeggen, dat het oude leerplan wel uitvoerbaar was.

leraren juist de andere leerlingen iets te leren. En dat kan zeker: de wiskundevrees en -haat mogen alleen bestaan bij die leerlingen, die ook in de talen niets presteren.

Zondert men van de leerlingen af degenen, die een speciale begaafdheid voor wiskunde hebben, en degenen, die zowel in wiskunde, als in de talen slecht zijn [1]), dan blijven over de door mij in 't vervolg als „normale begaafde" aan te duiden leerlingen. Ik meen dan de volgende stelling te mogen aanvaarden: *De wiskunde heeft, als leervak voor de middelbare school, in 't geheel geen recht van bestaan, als er voor het grootste deel der normaal begaafde leerlingen, niet voldoende vormende waarde* [2]) *van uitgaat.*

Deze stelling bepaalt zowel het tempo als de leerstof. En hier komt nu het conflict opdagen. Zal men zich het tempo laten voorschrijven door het leerplan, of door het bevattingsvermogen van den normaal begaafden leerling, voor wien het voorgeschreven tempo zeer beslist te snel is? Wie heeft nooit de klacht gehoord van den ijverigen, middelmatigen eerling: „Hè mijnheer, gaan we nu al verder? Ik begin er juist een beetje in te komen!" We troosten den leerling met de herhaling, die in het verschiet ligt. Maar als deze aan de orde komt, slaan we die maar over: de tijd dringt!

Waarom moet dat nu eigenlijk zo? Waarom mag de wiskundeles niet gekenmerkt worden door een weldadige sfeer van kalmte en rust, inplaats van door een gespannen sfeer van: „zouden ze 't al voldoende begrepen hebben, zodat ik weer verder kan gaan met het volgende onderwerp"? Hoe vaak zegt men niet tegen zich zelf: „vooruit, 't kan zo wel, verder maar weer!" Maar 't kan zo niet! Wie heeft zich nooit geërgerd aan de geringe kennis van de planimetrie, die zich in klas 4 zowel bij de stereometrie als bij de trigonimetrie openbaart, of aan de zorgen, die het probleem $\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}}$ aan de leerlingen der 5e klas baart? Waarom klaagt de mechanicaleraar er over, dat de driehoeksmeting zo'n struikelblok is, en de algebra en de meetkunde de leerlingen zo dwars zitten? Men heeft al beproefd, daar een psychologische verklaring van te geven. Ik beveel de volgende verklaring aan: dat komt, doordat de leerlingen niets van driehoeksmeting, algebra en meetkunde af weten!

---

[1]) Ik geef toe, dat het aantal dezer laatsten door onvoldoende selectie soms te groot is; ook, dat sommigen hunner na verschillende doublures toch nog een einddiploma behalen; ik meen echter, dat het leerplan met hen geen rekening behoort te houden.

[2]) Sommige richtingen zullen liever spreken van onvoldoende cultuuroverdracht.

Bezien we eens het programma voor de meetkunde vóor de klassen 4 en 5. Houden we ons aan de bij dit programma oorspronkelijk ontworpen urenregeling (5 uren per week in beide klassen), dan zal men toch hoogstens 3 uren per week in beide klassen aan de meetkunde kunnen besteden. Nu zijn die 3 uren al zéér krap, als men daarin alleen stereometrie en beschrijvende meetkunde doet. (Men moet ze toch ook voor het schriftelijk examen voorbereiden, zodat het eigenlijke voortschrijdende onderwijs in de 5e klas uiterlijk eind Februari geëindigd moet zijn.) Maar nu moet men daarin ook nog de meetkunde der kegelsneden behandelen en bovendien de beginselen der planimetrie herhalen, vooral met het oog op de grondslagen. Deze laatste moeten dan in sneltreintempo gelegd worden, hetgeen mij voor grondslagen niet aanbevelenswaardig lijkt. Men kan het beter nalaten.

Maar, zal iemand zeggen, U houdt misschien wat tijd over van de algebra en de driehoeksmeting, voor elk van welke vakken 1 uur per week beschikbaar is. Laat ons zien! Wat moet er in het stelkundeuur afgewerkt worden? Irrationele vergelijkingen en andere verg.; die tot vierkantsvergelijkingen herleidbaar zijn; reststelling; beginselen der differentiaal- en integraalrekening met toepassing op grafische voorstellingen; $y = \frac{ax + b}{px + q}$; $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$; herhaling en uitbreiding van het getalbegrip; algemene herhaling. Hier voeg ik nog aan toe: limietbegrip, dat immers in klas 3 te hooi en te gras aan de orde geweest is, en dat nu ernstig overgedaan moet worden. Hierbij behoort men te bedenken, dat het onderwerp: algemene herhaling niet pas na Februari in de 5e klas kan aanvangen; dan komt er van het eindexamen niets terecht; maar dat men doorlopend vraagstukken ter herhaling moet opgeven, de gehele 4e en 5e klassen door.

Het programma is op zich zelf genomen, aanlokkelijlk genoeg (behalve dan de functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$; ik kan de smaak voor deze nutteloze functie maar niet te pakken krijgen en dat is er na de voordracht van Dr. Gruting[1]) niet beter op geworden), maar het is volslagen onmogelijk het in de toegemeten tijd enigszins tot zijn recht te laten komen. Blijft er dus van het algebrauur geen seconde over, dan is er nog hoop op de driehoeksmeting? Het mocht wat. Wie de leerlingen in de laatste maanden van het 5e leerjaar ziet modderen met de eenvoudigste problemen, louter omdat hun de

---

1) Zie *Euclides*, 20e jaargang, bl. 87 e.v.

routine, niet de kennis, ontbreekt, weet, dat ook de driehoeksmeting lijdt aan chronisch tijdsgebrek.

Misschien wil iemand nog tegenwerpen, dat men tegenwoordig in klas 4 over 6 uren beschikt, zodat de zaak nu wel in kannen en kruiken is. Helaas, het voorgeschreven leerplan voor de eerste 3 klassen was met de urentabel 6—5—5 al niet conscientieus uitvoerbaar; hoe zal dat gaan met de tabel 5—4—5? Hele stukken worden (met een zucht van verlichting) naar klas 4 overgeheveld; het extra uur is al geheel besproken.

Wat voor vormende waarde gaat er nu van dit hijgende onderwijs uit? De leerlingen moeten telkens weer een nieuw onderwerp aanvangen, terwijl het hun nog duizelt van het vorige. Dat houdt de leraar ook niet uit; hij schrapt, wat maar enigszins gemist kan worden, uit het programma.

Eén van de voornaamste oefeningen, juist voor den middelmatigen leerling, bestaat in het schriftelijk of mondeling weergeven van een betoog. Het betoog zelf vinden, daartoe is hij menigmaal niet in staat. Maar als de leraar het met geduld en geestdrift voordraagt, komt het moment, dat hij het licht ziet dagen: hij begrijpt het. Maar nu het betoog herhalen en schriftelijk weergeven. De ijverige leerling doet dit met genoegen. Hij heeft de zaken goed voorbereid, hij ziet een lichtpunt, hem wordt óók de kans geboden iets te presteren, en hij presteert iets. Het onderwijs verkrijgt voor hem vormende waarde, het vormt zijn betoogtrant, het vormt zijn karakter, er wordt cultuur overgedragen. Maar hoe gaat het dikwijls? Jongens, schrijf van die en die sommen alleen maar een beknopte oplossing in een paar regeltjes op! In snel tempo passeren de oplossingen de revue: volgend onderwerp! Het verdriet den toch wel goedwillenden leerling; hij kan niet meekomen.

Dat de omvang van het leerpan te groot is, vindt voor een deel ook zijn oorzaak daarin, dat de inhoud niet overal in overeenstemming is met de krachten van de leerlingen, waardoor verschillende onderwerpen onevenredig veel tijd eisen. Ik wil hierbij op enkele onderwerpen de aandacht vestigen.

Ten eerste is een ernstige behandeling van het limietbegrip voor klas 3 véél te zwaar, maar ook voor klas 4 zelfs nog te moeilijk. Een behandeling in de 4e klas, die enigszins aan niet al te zware eisen van exactheid voldoet, vordert nog zóveel tijd, dat men zich telken jare weer afvraagt: zal ik er maar niet mee ophouden? Dat $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ ziet iedere leerling — naar zijn eigen mening — goed in, maar als men het hem gaat bewijzen wordt hij met stom-

heid geslagen over zoveel omhaal. Eindelijk echter is het U gelukt, hem de noodzakelijkheid van een goede definitie met daarop berustend bewijs te doen inzien, en nu waagt ge U aan $\lim_{x \to 5} (2x + 5)$. Een nieuwe definitie, een nieuw bewijs! Allerwegen priemt de angst uit de wijd opengesperde ogen: zullen we ons daar nu in 't vervolg mee bezig moeten houden? [1])

Ten tweede zijn de differentiaal- en integraalrekeningen toch werkelijk te zwaar. De techniek van het differentiëren gaat er gauw genoeg in, zelfs het bepalen van extremen wordt een „koud kunstje", maar méér dan een kunstje is het dan ook niet. Van de theorie komt niets terecht. Bij zeer vele leerlingen is de gedachtengang deze: hij zal wel eens uitgepraat raken, en dan komen de sommen, net als bij de limieten, en dan komt het best in orde! Hoe eer we van deze stof verlost worden, hoe beter. Het enige practische nut, dat de differentiaalrekening op de H. B. S. kan leveren, ligt in de toepassingen op de mechanica. Welnu, daar kan men, desgewenst, het differentiëren occasioneel behandelen, zonder dat op het wiskundeprogramma van de 4e klas het gewichtige onderwerp „differentiaalrekening" prijkt. Overigens zou ik willen vragen: waar zit meer vormende waarde in, in een behandeling van de harmonische trilling met behulp van differentiaalrekening, of in een, waarbij men haar beschouwt als de projectie van een eenparige cirkelbeweging? Ik geef aan de laatste methode de voorkeur.

Ten derde moet ook iets over rekenkunde en getalbegrip gezegd worden. Het eerste gedeelte van het programma voor de 1e klas is aan de rekenkunde gewijd. Blijkens de toelichting van den Inspecteur der Lycea [2]) is het onderwijs hierin in de 1e klas voor een groot deel als taalonderwijs op te vatten; de leerlingen moeten een behoorlijke opsomming kunnen geven van de eigenschappen, die bij een vermenigvuldiging als 27×237 optreden. Deze eis is, dunkt mij, reeds te zwaar. Ik meen, dat geen leerling in staat is, bedoelde eigenschappen te reproduceren, tenzij de leraar ze eerst in een rijtje op het bord geschreven of gedicteerd heeft, en hij ze gehoorzaam van buiten heeft geleerd. [3])

---

[1]) Eens had ik mij nogal wat moeite gegeven, om althans een gedeelte van deze materie goed te behandelen. Na het hoofdstuk afgehandeld te hebben en de bijbehorende vraagstukken te hebben laten maken, gaf ik, als afscheidsnummer, op: Bepaal de kleinste gehele waarde van n, waarvoor $0{,}96^n < 0{,}2$ is. Een zeer ijverige (maar middelmatige) leerling vroeg mij, wat dit vraagstuk nu met limieten te maken had! Dat was het resultaat!

[2]) Zie het verslag in *Euclides*, 14e jg., blz. 81.

[3]) Dit heeft nog heel wat voeten in de aarde. Het is mij nog nooit gelukt, om een gehele klas zover te brengen, zelfs niet onder de pressie van

Belangstelling bestaat er in het minst niet voor, psychologisch is het een enorme fout, deze stof in de eerste klas aan de orde te stellen. Immers de leerling komt naar de middelbare school, boordevol verwachting en werklust (ik spreek nog steeds over den boven gedefinieerden normaal begaafden leerling). Men zet hem rekenkunde voor (op sommige scholen 3 uur; op andere tot December vroeger zelfs 6 uur per week), de leerling voelt direct, dat hij hierin zelfstandig nooit iets zal kunnen bereiken; hij raakt teleurgesteld; zijn werklust krijgt geen gelegenheid zich behoorlijk te uiten; de kiem voor wiskundevrees of wiskundehaat is gelegd. Hij kruipt in zijn schulp, en het kost heel wat moeite om hem er weer uit te lokken.

Vele collega's, met wie ik er over sprak, waren het niet alleen met mij eens, maar hadden de rekenkunde reeds lang tot een minimum teruggebracht, hetgeen ik tegenwoordig ook doe; ik mag mijn onderwijs niet instellen op de enkele zeer begaafde geest (die in sommige klassen zelfs geheel ontbreekt!)

Ieder, die zelf een kweekschool doorlopen heeft, in de tijd, toen er nog vierjarige kweekscholen met geselecteerde leerlingen waren, weet, hoeveel moeite daar de rekenkunde in alle 4 leerjaren aan de meeste leerlingen berokkende, en dat waren dan leerlingen van 14—18 jaar. Hoe zullen we dan op de H. B. S. daar de leerlingen van 12 jaar mee bezig houden? De rekenkunde komt hun dan ook als een onzinnig vak voor; wie op enigszins vertrouwelijke voet met zijn klas staat, zal dat toch meermalen vernomen hebben.

Voor de telkens weerkerende uitbreiding van het getalbegrip gelden overeenkomstige bezwaren. Een *opzettelijke* behandeling van deze successieve uitbreidingen is in de eerste 3 (4?) klassen volslagen onvruchtbaar. Onopzettelijk wordt het getalbegrip uitgebreid door de invoering van nieuwe getalsoorten, maar dat behoeft niet met zoveel woorden in het leerplan vermeld te worden. Een opzettelijke behandeling zal, wil zij vruchten afwerpen, of zelfs maar gevolgd kunnen worden, minstens tot klas 5 uitgesteld moeten worden. Daar behoort feitelijk ook de gehele rekenkunde thuis, daar zijn de leerlingen langzamerhand rijp geworden om van de schoonheid van een vak als rekenkunde, onder goede leiding, althans iets te kunnen waarderen.

Er is toch zeker niemand, die de rekenkunde in de eerste klas wil gebruiken om de leerlingen logisch te leren denken? Ik moet hem dan een illusie ontnemen. De leerling denkt nl. als volgt logisch:

---

strafwerk en onder medewerking van de ouders. Aan deze laatsten dank ik een beschamend inzicht in de ellendige tijd, die wij, als rekenkunde-leraren, aan de beginnende eersteklassertjes bezorgen.

$a^3 \times a^4 = a^7$, dus $a^b \times a^c = a^{b+c}$. Hij zal nooit eens denken: $a^b \times a^c = a^{b+c}$, dus $a^3 \times a^4 = a^7$. Als hij niet meer weet, wat $a^3 \times a^4$ is, zal hij nooit de desbetreffende eigenschap reciteren, en ook niet kunnen reciteren: het onder woorden brengen van het probleem is voor hem moeilijker dan het probleem zelf. Er schijnt ten dezen een noodlottig misverstand te bestaan. Men is het er in 't algemeen over eens, dat het wiskundeonderwijs onder andere dienstbaar moet zijn aan de ontwikkeling van het logische denken. Maar nu menen sommigen, dat dit moet geschieden, door de leerlingen de wiskunde als een logisch sluitend geheel voor te houden. Ik beweer, dat men hen daar in 't geheel niet logisch door leert denken; zij kunnen de wiskunde pas als logisch bouwwerk waarderen, nadat ze een lange leerschool van logisch denken (van een apart soort) hebben doorgemaakt, en wel aan de hand van daartoe geschikte brokstukken uit de wiskunde. Men laat den aankomenden Delftschen student toch ook de eerste kennis met de Hogere Algebra niet maken uit de Moderne Algebra van Prof. van der Waerden?

Ten vierde moet ik ook mijn teleurstelling uitspreken over de opgedane ervaringen met de behandeling van de lineaire functie in klas 2 en de kwadratische functie in klas 3. Er is zeer veel tijd voor nodig, om hier nog maar weinig te bereiken; behandelt men dezelfde stof in klas 4, dan heeft men in minder tijd beter resultaten; en het bewijs, dat de grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ een parabool voorstelt, indien gegeven is, dat die van $y = ax^2$ er een is, kan men zelfs beter tot de 5e klasse uitstellen.

Het leerplan huldigt overal de stelregel: eerst de theorie, dan de toepassingen. Eerst $y = ax^2 + bx + c$, dan de vierkantsvergelijkingen. Eerst de evenredige afhankelijkheid in klas 2, dan de toepassingen in de natuurkunde. Eerst het limietbegrip, dan de meetkundige reeks. Eerst de differentiaalrekening, dan de mechanica. Is deze stelregel aanbevelenswaardig? Ik meen van niet. Een geroutineerd schoolmeester zal eerst experimenteren, dan een regel vaststellen, dan het resultaat bewijzen en het misschien later eens zijn plaats in het logische bouwwerk aanwijzen. Zó heeft men kans, iets te bereiken.

Zo meen ik ook, dat men het functiebegrip niet moet ontwikkelen, door reeds in de 2e klasse een functie aan de orde te stellen [1]). Integendeel, door allerlei *vooroefeningen* bereidt men het functie-

---

[1]) Als Felix Klein wil, dat het functiebegrip het onderwijs als een zuurdesem zal doordringen, dan meen ik te moeten opmerken: òf men wachte met wiskunde-onderwijs tot de leerlingen wat ouder zijn, òf men wachte in ieder geval met de grafische voorstellingen tot de 4e klas.

begrip voor, en als men eindelijk eenmaal rechtstreeks een functie als $y = ax + b$ aan de orde stelt, moet het arsenaal van den leerling al flink gevuld zijn. Men bereidt het functiebegrip voor, als men van $a^3 \times a^4$ opklimt(!) tot $a^b \times a^c = a^{b+c}$ (inderdaad een hele klim [1]); ook, als men de zwaartelijnformule toepast of de formule voor de wortels ener vierkantsvergelijking; ook als men in t_n niet een zekere term, maar iedere term ener reeks leert zien. Verder moeten geen technische bezwaren aanwezig zijn: de substitutie van $x = 1½$ in $\rightarrow ½x^2 + 1½x + 3$ moet snel kunnen verlopen.

Begrippen als tg α moeten niet daags van te voren eerst even aangeleerd zijn, maar moeten reeds tot het onvervreemdbaar bezit van den leerling behoren (hij moet er dus al menigmaal mee gewerkt hebben). Dit alles is niet vóór de 4e klas verwezenlijkt.

Zo zitten we nu met een leerplan, dat naar omvang en inhoud te zwaar is. Het is niet mijn bedoeling, daar de opstellers een verwijt van te maken. Hun streven tot vernieuwing van het wiskundeonderwijs was en is zeer toe te juichen; zij konden van te voren niet weten, hoe de leerlingen op de nieuwe leerstof zouden reageren en hoe de leerlingen ener lagere klas op de leerstof ener hogere zouden reageren; het leerplan was een experiment. De mislukking van het experiment moet echter zo spoedig mogelijk onder de ogen gezien worden. Van terugkeer tot het oude leerplan is ook geen heil te verwachten; dit was evenzeer te groot van omvang, terwijl het te technisch van inhoud was. Ik moge hier een tweetal citaten inlassen. Het eerste is uit een voordracht van Dr. E. J. Dijksterhuis [2]).

„Wat men echter niet goed kan praten, is het adembenemende tempo, waarin die weg moet worden afgelegd. Want hier ligt voor mijn gevoel de voornaamste oorzaak van het geringe succes van ons wiskundeonderwijs". (Uitgesproken in 1936, dus nog vóór de invoering van het nieuwe leerplan. Met welk adjectief moet dan het huidige tempo wel weergegeven worden!)

Het tweede citaat is uit de rede van Prof. Dr. O. Bottema, uitgesproken bij de ambtsaanvaarding aan de T.H. te Delft [3]).

„Intussen moge ik er aan toevoegen, dat de voorstellen van de commissie-Beth in mij geenszins een voorstander vinden; de uitvoering van haar denkbeelden heeft mij steeds nog niet eens onwenselijk, maar rechtuit onmogelijk geleken, en het is mij nog altijd

---

[1]) Illustratie: een leerling bleef in de 1e klas zitten met een onvoldoende voor wiskunde. Hij ging van school af. Twee jaar later dook hij in de 3e klas weer op: hij had nu op een andere school de eerste twee klassen doorlopen, en, deelde hij triomphantelijk mee, daar was de algebra veel gemakkelijker, daar deden ze niet aan letters in de exponenten!

[2]) *Euclides,* 14e jg., blz. 110.

[3]) *Euclides,* 18e jg., blz. 141.

onbegrijpelijk, dat de ervaringen van anderen omtrent het bevattingsvermogen der leerlingen van 12 tot 18 jaar [1]) zozeer verschillen van de mijne".

Tot slot wil ik nog twee denkbeeldige opponenten beantwoorden. De eerste opponent zegt: U klaagt erg, maar de eindexamencijfers zijn over 't algemeen zeer gunstig, te gunstig zelfs. Hierop antwoord ik, dat daar drie oorzaken voor zijn, die even zovele argumenten voor mijn standpunt opleveren; nl. 1⁰ dat het eindexamenprogramma niet identiek is met het leerplan; 2⁰ dat vele leerlingen op het eindexamen ouder dan 16 jaar zijn en de cursus voor hen meer dan vijfjarig was; 3⁰ dat het schriftelijk eindexamen op enigszins eigenaardige wijze ingericht is; bij ieder vraagstuk worden nl. enkele eenvoudige vragen ingelast, die het eindcijfer zeer gunstig beïnvloeden [2]), terwijl een corrigerend mondeling examen daardoor vaak ontbreekt.

De tweede opponent zegt, lichtelijk geïrriteerd: maar wat wilt u dan? Het leerplan sterk besnoeien, of meer uren uittrekken? Hierop moet ik antwoorden: het laatste is niet gerechtvaardigd tegenover de andere leervakken; het eerste is niet wenselijk. als men in de H. B. S. een instituut voor voorbereidend hoger onderwijs ziet, echter wel verdedigbaar, als men het H. B. S. onderwijs als eindonderwijs opvat. Hier schuilt een moeilijkheid. Men verlieze echter niet uit het oog, dat het hoger onderwijs met de huidige toestand ook niet tevreden is: de Delftse hoogleraren hebben zich ten dezen ook niet onbetuigd gelaten. Hun klachten komen eigenlijk hierop neer, dat de aankomende studenten met hun kennis niets kunnen „doen", ze tonen in allerlei opzichten gebrek aan routine, zowel als aan inzicht. Het is al meer uitgesproken en blijkt ook hier weer uit, dat eindonderwijs en voorbereidend hoger onderwijs toch eigenlijk voor een groot deel hetzelfde vragen: inzicht en bekwaamheid! Berust daarop niet juist het feit, dat de H. B. S. zowel eind- als voorbereidend hoger onderwijs kan geven? Welnu, dan moeten we eindelijk eens gaan trachten ook het wiskundeonderwijs zodanig in te richten, dat het resultaat, ook voor het gros der „slechts" normaalbegaafde leerlingen, is: inzicht en bekwaamheid (die nu, bij een zeven met vrijstelling, in 't geheel niet gewaarborgd zijn). Dat kan alleen, daar urenuitbreiding onmogelijk is, door leerplanbesnoeiïng. Kan het hoger onderwijs daar, om practische redenen, niet mee accoord gaan, dan zal er niets anders opzitten, dan een 6e leerjaar toe te voegen,

---

[1]) Waarom 18 jaar? Waarom niet 16 jaar?

[2]) Ten einde vreesachtige leerlingen op te monteren, onthaal ik hen wel eens op de volgende parodie van een eindexamenvraagstuk: *a*) Vul in: $3 + 5 = \ldots\ldots$ *b*) Als $x + 5$ gelijk is aan 9, hoe groot is dan $x^2 + 5^2$, *c*) een gepeperde vraag; maar geen nood, je hebt al een 6 te pakken!

dat dan òf alleen voor de toekomstige studenten, òf vóór alle leerlingen bestemd is; in het eerste geval krijgt men een einddiploma na 5-j. cursus en een toelatingsdiploma na 6-j. cursus. Dat zou ook het, nu eveneens hijgende, onderwijs in Natuurkunde, Mechanica en Scheikunde ten goede komen; misschien krijgt de Cosmografie dan ook weer eens een kans.

Er zijn twee hoofdbezwaren tegen dit (niet nú voor 't eerst gedane) voorstel. Ze zijn echter niet zo ernstig, als het onheil, dat door het vigerende leerplan (als men er zich tenminste aan houdt) aangericht wordt; ik bedoel 1^0 het verlengt de studietijd met een jaar; 2^0 het kost te veel geld. Op het eerste bezwaar wil ik het volgende antwoorden. In de eerste plaats zal dit voor vele leerlingen niet juist zijn. De schooltijd duurt, door doubleren, nu vaak 6 of 7 jaar; een minder kortademig onderwijs zal minder doublures tengevolge hebben; het zou wel eens kunnen zijn, dat voor enkele leerlingen de schooltijd met een jaar verkort werd! Ten tweede doet de gymnasiast er altijd minstens 6 jaar over. Ten derde treedt de toekomstige student beter en degelijker toegerust de poorten der alma mater binnen. [1])

Op het tweede bezwaar, nl. dat het voorstel te veel geld zou kosten, zou men botweg kunnen antwoorden: dat moet dan maar! Ik wil echter ook wel minder bot antwoorden, en opmerken, dat het in 't geheel niet zoveel geld behoeft te kosten. Men hevele uit elk leerjaar (gerekend naar de urentabel van 1937, waar dit leerplan op gebaseerd is) een of twee uren naar het 6e leerjaar over (niet alleen wiskundeuren). Aangezien aan de meeste scholen het aantal te vormen 6e klassen hoogstens de helft is van het aantal 1e, 2e, 3e of 4e klassen (dikwijls zelfs $^1/_3$, $^1/_4$ of $^1/_5$), zal het totaal aantal te geven lessen aan één school er niet zoveel door stijgen; het 6e leerjaar behoeft geen 30-urige week te hebben, er zal veel tijd voor huiswerk over moeten blijven.

Van harte *hoop* ik, dat de tijd nog eens zal aanbreken, waarin de wiskundeles voor méér leerlingen, dan nu het geval is, een vruchtbaar en aangenaam, zij het ook veeleisend, uur zal zijn, zonder dat de leraar daarbij in voortdurende overtreding is ten opzichte van het leerplan.

---

[1]) Uit ervaringen met oudleerlingen weet ik, dat ze regelmatig hinder ondervinden van hun gebrek aan kennis inzake onderwerpen als cyclometrische functies, traagheidsmomenten, verkorte bewerkingen. Wij schrappen die van onze programma's, maar dat wordt nergens goedgemaakt. Bij een 6-jarige cursus zou daar ook in voorzien kunnen worden; deze onderwerpen zijn voor het v.h.o. beter dan de differentiaalrekening, die toch weer overgedaan wordt.

KORRELS.

LXV.

Een bewijs voor de Stelling van Euler.

In sommige leerboeken der Stereometrie [1]) wordt de stelling van Euler, die het verband vastlegt tussen de aantallen hoekpunten, ribben en zijvlakken van een convex veelvlak, bewezen met behulp van de projectie van dit veelvlak op een plat vlak.

Een hiermee in hoofdzaak overeenkomend bewijs, maar iets overzichtelijker wegens grotere symmetrie, enkelvoudige overdekking van het projectievlak en het wegblijven van alle moeilijkheden met betrekking tot de begrenzing van de projectie, is het volgende.

Beschouw een convex veelvlak met h hoekpunten, r ribben en z zijvlakken. Beschrijf nu een boloppervlak met willekeurige straal, dat een punt binnen het veelvlak tot middelpunt heeft en projecteer alle hoekpunten en ribben vanuit het middelpunt van de bol op het boloppervlak. Dit wordt dan enkelvoudig overdekt door een net van z bolveelhoeken met r draden en h knooppunten.

De som van alle hoeken van deze veelhoeken is

$$h \times 360^\circ.$$

Stelt echter n het aantal zijden van één van de veelhoeken voor en is ε zijn spherisch exces, dan is de som van de hoeken van alle veelhoeken blijkbaar ook

$$\Sigma(n-2) \,.\, 180^\circ + \Sigma\varepsilon = (\Sigma n) \,.\, 180^\circ - z \,.\, 2 \,.\, 180^\circ + \Sigma\varepsilon.$$

Daar elke draad van het net 2 maal als zijde van een veelhoek optreedt, is $\Sigma n = 2r$. Verder is, zoals dadelijk aangetoond zal worden, $\Sigma\varepsilon = 720^\circ$ en dus wordt

$$h \,.\, 360^\circ = 2r \,.\, 180^\circ - 2z \,.\, 180^\circ + 720^\circ,$$

zodat

$$h = r - z + 2,$$

dus

$$h + z = r + 2.$$

Dat $\Sigma\varepsilon = 720^\circ$, blijkt aldus:

Voor een boldriehoek geldt

$$\varepsilon = \frac{\text{opp. v. d. driehoek}}{\text{opp. v. d. bol}} \,.\, 720^\circ.$$

[1]) Zie b.v. het Leerboek van Vredenduin, blz. 89—91.

Daar het spherisch exces van een bolveelhoek gelijk is aan de som van de excessen der driehoeken, waarin hij door de diagonalen uit een hoekpunt verdeeld wordt, geldt nu ook voor de bolveelhoek

$$\varepsilon = \frac{\text{opp. v. d. veelhoek}}{\text{opp. v. d. bol}} \cdot 720^\circ.$$

en bijgevolg wordt voor het de bol enkelvoudig overdekkend net van veelhoeken

$$\Sigma\varepsilon = \frac{\text{opp. v. d. bol}}{\text{opp. v. d. bol}} \cdot 720^\circ = 720^\circ.$$

De noodzaak, het verband tussen spherisch exces en oppervlak van een boldriehoek in onze beschouwing te betrekken, is tot op zekere hoogte een voordeel, daar we hier een aanwinst hebben bij de weinige toepassingen die we van deze betrekking aan onze leerlingen kunnen geven.

J. W. DEKKER.

LXVI.

A′.

Men gebruikt A′, als men aan een letter A een overeenkomstige wil toevoegen b.v.

△ ABC en een congruente driehoek A′B′C′, een gelijkvormige driehoek A′B′C′, een homothetische driehoek A′B′C′, een geïnverteerde driehoek A′B′C′, een symmetrische driehoek A′B′C′, ja, wat niet al. Verder worden in de beschrijvende meetkunde de projecties van punten en lijnen wel aangegeven door A′ en A″, l' en l''; men heeft dan b.v. te lezen: de horizontale projectie van de vierhoek ABCD is A accent, B accent, C accent, D accent, zijn verticale A dubbel accent, B dubbel accent, C dubbel accent, D dubbel accent; wordt er ergens nog eens op een hulpvlak geprojecteerd, dan krijgen we A drie accent, B drie accent, C drie accent, D drie accent. Waarom niet veel korter A_1, A_2, A_3? Het leest gemakkelijker en het is wel zo eenvoudig.

En wat die eerste accenten aangaat, waarom zouden we het accent, dat voor alles en nog wat gebruikt wordt zonder enige aanduiding van de dienst, die het doet, maar niet vervangen door een aanwijzer, die deze dienst met een enkele kleine letter aangeeft? We geven wat voorbeelden:

△ ABC verschoven wordt △ $A_vB_vC_v$;

△ ABC gedraaid wordt △ $A_dB_dC_d$;

$\triangle$ ABC gespiegeld wordt $\triangle$ $A_sB_sC_s$;
$\triangle$ ABC geïnverteerd wordt $\triangle$ $A_iB_iC_i$;
$\triangle$ ABC en een homothetische $\triangle$ $A_hB_hC_h$; enz.

Op een bol is de pooldriehoek van $\triangle$ ABC $\triangle$ $A_pB_pC_p$ en de elementen van deze zijn a_p, b_p, c_p, α_p, β_p, γ_p; de tegenpunten van A, B en C kan men A_t, B_t en C_t noemen; enz. enz.

Al deze aanwijzers, de cijfers en de lettertjes, lezen veel gemakkelijker dan het vreemde woord van twee lettergrepen, dat men, zover ik weet, nooit afkort tot één lettergreep zoals b.v. log voor logarithme; een toevoegsel aan een letter moet kort en duidelijk zijn. Waar dit mogelijk is, en dat is het, en waar bovendien het karakter van het overeenkomstige door een kleine letter wordt aangegeven, daar is er m.i. niets op tegen om de dienst van het accentteken wat te beperken. Er blijven er nog genoeg over.

P. WIJDENES.

Ingekomen boeken van:

P. NOORDHOFF, GRONINGEN-BATAVIA.

P. WIJDENES, Algebraische Vraagstukken I, **9e druk,** *f* 1.70, II, **9e druk,** *f* 1.70, gec. *f* 1.95.

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, Nieuwe Schoolalgebra I, **15e druk,** II **13e druk,** III **9e** druk, alle *f* 2.25.

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, Leerboek der Algebra II, **9e druk,** gec. *f* 2.—.

Idem. Rekenboek voor de H.B.S. I, **20e druk,** *f* 1.75, II **12e druk,** *f* 1.25.

Dr. P. MOLENBROEK, Oplossingen van de Vraagstukken uit: Leerboek der Vlakke Meetkunde, **3e druk,** *f* 2.60.

P. WIJDENES, Antwoorden op de Middelalgebra *f* 2.10.

NOORDHOFF's Tafel in vier decimalen, **8e druk,** *f* 1.05.

TRIGONOMETRIE ZONDER GONIOMETRISCHE TAFELS

door

W. P. THIJSEN (Hilversum).

1. Zij driehoek ABC rechthoekig in A, terwijl B het hoekpunt van den kleinsten scherpen hoek is. Op de gebruikelijke wijze worden de zijden a, b en c, de grootten der hoeken in radialen door α, β en γ aangegeven. Wordt de kleinste scherpe hoek in graden, minuten of secunden uitgedrukt, dan zullen we deze getallenwaarden aangeven met resp. B°, B′ en B″.

Men heeft dan

$$B^{\circ} = \varrho^{\circ}\beta;\quad B' = \varrho'\beta;\quad B'' = \varrho''\beta$$

met [1])

$\varrho^{\circ} = 57{,}2958;\ \varrho' = 3437{,}75;\ \varrho'' = 206265{,}4$ (Versluys-Tafel H blz. 169)

hetgeen algemeen kan worden aangeduid door

$$B = \varrho\beta.$$

2. *Benaderingsformules voor kleine hoeken.* De betrekkingen

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin\beta}{\beta} = 1;\quad \lim_{\beta\to 0}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} = 1;\quad \lim_{\beta\to 0}\frac{\sqrt{(2-2\cos\beta)}}{\beta} = 1$$

openen reeds dadelijk de mogelijkheid om voor een kleinen hoek B benaderingsformules neer te schrijven:

$$B \approx \varrho\frac{b}{a};\quad B \approx \varrho\frac{b}{c};\quad B \approx \varrho\sqrt{\frac{2(a-c)}{a}}.$$

Ontwikkelt men bijv.

$$\varphi(\beta) \equiv \beta - \sin\beta$$

in een machtreeks, dan heeft men bij verwaarloozing van termen van hooger orde

$$\beta - \sin\beta \approx {}^{1}/_{6}\beta^{3}$$

of ook

$$B - \varrho\sin\beta \approx {}^{1}/_{6}\varrho\beta^{3}$$

Zijn inderdaad de termen van hooger orde te verwaarloozen en stelt men den eisch, *dat dit verschil kleiner is dan de helft der ge-*

---

[1]) De Briggiaansche logarithmen van de hier volgende getallen zijn resp.: 1,75812; 3,53627; 5,31443.

bruikte eenheid, dan heeft men

$$^1/_6\varrho\beta^3 < {}^1/_2$$

of ook

$$B < \sqrt[3]{3\varrho^2}.$$

Nu is:

$$\varphi'(\beta) = 1 - \cos\beta$$

zoodat dus $\varphi(\beta)$ een monotoon toenemende functie is. Men kan dus gemakkelijk onderzoeken, of het interval

$$(0, \sqrt[3]{3\varrho^2})$$

inderdaad het interval is, waarin de benaderings-formule bruikbaar is, dan wel of dit eenigszins moet worden gewijzigd.

Geven we de bovengrens van dit interval met g aan, dan vindt men

$$g^\circ = 21°; \quad g' = 5°28'; \quad g'' = 1°23'55''.$$

3. *Eenige algemeene opmerkingen.* Bij een of andere benaderingsformule voor β:

$$\beta \approx f(\beta); \quad f(0) = 0$$

ligt het voor de hand, om

$$\varphi(\beta) = \beta - f(\beta)$$

in een machtreeks te ontwikkelen, waarbij ontstaat:

$$\varphi(\beta) = \pm \frac{1}{A}\beta^p + R_p.$$

Men kan dan spreken van een benadering van de p^{de} orde.

In het algemeen is te verwachten, dat de benadering des te beter zal zijn, naarmate A en p grooter zijn. Alleen bij kleine hoeken zal het echter veelal geoorloofd zijn den restterm R_p te verwaarloozen, zoodat het bij benaderingsformules, die voor een groot gedeelte van het interval $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ moeten gelden, weinig zin heeft om de uitdrukking

$$\sqrt[p]{^1/_2 A\varrho^{p-1}}$$

te gaan beschouwen.

Kan men aantoonen, dat

$$\varphi'(\beta) = 1 - f'(\beta)$$

voor $\beta > 0$ standvastig teeken heeft, dan zal de formule in het interval $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ bruikbaar zijn, indien geldt:

$$\left|\frac{\pi}{4} - f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| < \frac{1}{2\varrho}.$$

Voor practische bruikbaarheid is het verder gewenscht, dat in

benaderingsformules slechts eenvoudige getallen optreden. Dit brengt mede, dat zulke formules worden afgeleid uit limietformules, die gelden voor $\beta \to 0$ en niet bijv. voor $\beta \to \frac{\pi}{8}$, ondanks de voordeelen, welke dit laatste zou meebrengen. Dan immers zou aan beide zijden van deze waarde een goede aansluiting zijn te verwachten, hetgeen ongeveer een verdubbeling van het interval, waarin de benaderingsformule bruikbaar is, zou meebrengen.

Tenslotte zij nog opgemerkt, dat wij ons in dit artikel tot rechthoekige driehoeken zullen bepalen, daar de Trigonometrie van willekeurige driehoeken daartoe steeds is terug te brengen. En blijkbaar moet men zich hierbij beperken tot het geval, dat twee zijden — en dus ook drie zijden — bekend zijn, daar het geval, dat één zijde en een scherpe hoek gegeven zijn, neerkomt op het berekenen van een goniometrische verhouding van dien hoek. Zou men hierbij van het gebruik van een tafel willen afzien, dan zou men gebruik moeten maken van formules, die juist tot het samenstellen van de goniometrische tafels hebben gediend.

Men kan dus het vraagstuk, dat ons bezighoudt, als volgt formuleeren. Is het mogelijk bij rechthoekige driehoeken de kleinste hoek in een gegeven graad van nauwkeurigheid uit de zijden te berekenen, zonder het z.g. terugzoeken in een goniometrische tafel uit te voeren? Wij stellen daarbij de voorwaarde, dat een en dezelfde formule voor het geheele interval moet gelden, aan welke voorwaarde de benaderingsformules van § 2 niet voldoen, als men een berekening tot in secunden, minuten of zelfs graden nauwkeurig wil hebben.

4. *Benaderingsformules, waarin twee zijden optreden.* In theorie kan men het voorgaande uitbreiden door van de convergente reeksontwikkelingen

$$\beta = \frac{\sin \beta}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3 \beta}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^5 \beta}{5} + \ldots; \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

en

$$\beta = \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \beta + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \beta - \ldots; \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}$$

benaderingsformules af te leiden. Neemt men eenige termen hiervan, dan vindt men, dat het getal A slechts kleine waarden aanneemt, daar de genoemde reeksen zeer langzaam convergeeren.

Zoo is bijv.:

$$\beta - \sin \beta - \frac{1}{6} \sin^3 \beta = \frac{1}{13^1/_3} = \beta^5 + \ldots$$

en $$\beta - \operatorname{tg} \beta + {}^1/_3 \operatorname{tg}^3 \beta = {}^1/_5 \beta^5 - \ldots$$
wat zelfs ontoereikend is voor een benadering, in graden nauwkeurig.

Een iets beter resultaat verkrijgt men door het toelaten van gebroken vormen. Zoo heeft men bijv.:

$$\beta - \frac{\sin \beta}{1 - {}^1/_6 \sin^2 \beta - {}^{17}/_{360} \sin^4 \beta} = \frac{367}{15120} \beta^7 + \ldots$$

De benaderingsformule

$$B \approx \varrho \frac{360a^3b}{360a^4 - 60a^2b^2 - 17b^4}$$

blijkt bruikbaar te zijn voor berekeningen in graden nauwkeurig, maar heeft natuurlijk geen practisch belang.

Laat men ook wortels toe, dan heeft men o.a.

$$\beta - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \approx -\frac{1}{45} \beta^5$$

zoodat men in graden nauwkeurig heeft

$$B^0 \approx \varrho^0 \frac{b}{\sqrt[3]{(b^2c + c^3)}}.$$

Op deze formule komen wij nog nader terug.

5. *Benaderingsformules, waarin drie zijden optreden.* Een benaderingsformule, die in de geschiedenis der Wiskunde een zekere vermaardheid heeft gekregen en welke de aanleiding tot het schrijven van dit artikel heeft gevormd, is

$$B \approx 3\varrho \frac{b}{2a + c}.$$

Voor $3\varrho^\circ$ wordt meestal 172 genomen, bij welke constante volgens een uitvoerige beschouwing van P. Mansion[1]) de formule tusschen 28° en 36° een aansluiting geeft, die in vijf cijfers nauwkeurig is. Zij is afkomstig[2]) van Kardinaal Nicolaas van Cusa (1401—1464) en is later herhaalde malen opnieuw ontdekt. Zoo komt zij voor bij Snellius, hetgeen Huygens aanleiding gaf haar te bewijzen.

Men heeft:

$$\varphi(\beta) = \beta - \frac{3 \sin \beta}{2 + \cos \beta} = \frac{1}{180} \beta^5 + \frac{1}{1512} \beta^7 + \ldots$$

---

[1]) *Mélanges mathématiques.* Hierin wordt ook literatuur over deze formule opgegeven.

[2]) M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II p. 201.

alsmede

$$\varphi'(\beta) = \left(\frac{1 - \cos\beta}{2 + \cos\beta}\right)^2$$

zoodat dus $\varphi(\beta)$ een monotone functie is

6. Door omvorming van de formule in § 4 verkrijgt men verder:

$$\varphi(\beta) = \beta - \frac{\sin\beta}{\sqrt[3]{\cos\beta}} = -\frac{1}{45}\beta^5 - \frac{229}{5670}\beta^7 - \ldots.$$

alsmede

$$\varphi'(\beta) = 1 - {}^2/_3 \cos^{2/3}\beta - {}^1/_3 \cos^{-4/3}\beta$$

hetgeen voor $\beta > 0$ negatief is.

Dit geeft ons een tweede benaderingsformule van de vijfde orde:

$$B \approx \varrho \frac{b}{\sqrt[3]{a^2 c}},$$

welke met de bovenstaande formule een merkwaardige overeenkomst in bouw vertoont, echter het voordeel bezit geschikt te zijn voor logarithmische berekening; maar het nadeel heeft van geringere benadering. Dit laatste zou voldoende zijn, om deze formule buiten beschouwing te laten, ware het niet, *dat zij uitermate geschikt is, om naast de vorige te worden gebruikt.*

Vooreerst geeft nl. de eerste formule een te kleine en de tweede een te groote uitkomst. Zijn deze resp. B_1 en B_2 dan geeft dit reeds eenig inzicht in de bereikte nauwkeurigheid.

Vervolgens echter kan men beschouwen

$$B_3 = \frac{4B_1 + B_2}{5} = B_1 + 0{,}2\,(B_2 - B_1)$$

waardoor een benadering van de zevende orde wordt verkregen:

$$\beta - \frac{12\sin\beta}{5(2 + \cos\beta)} - \frac{\sin\beta}{5\sqrt[3]{\cos\beta}} = -\frac{107}{14175}\beta^7 + \ldots.$$

Toch is volgens de tabel in het ongunstigste geval, nl. voor $B = 45°$ de fout nog 48″. Vervangt men echter de factor 0,2 door 0,18:

$$B_4 = B_1 + 0{,}18(B_2 - B_1)$$

dan ontstaat een zeer goede benadering, waarbij de fout aan het einde van het interval nog slechts 7″ bedraagt en overigens nog kleiner is.

B	B_1	B_1-B	B_2	B_2-B	B_2-B_1	B_3	B_3-B	B_4	B_4-B
0°	0°0'0"	0"	0°0'0"	0"	0"	0°0'0"	0"	0°0'0"	0"
5°	5°0'0"	0"	5°0'0"	0"	0"	5°0'0"	0"	5°0'0"	0"
10°	10°0'1"	+1"	10°0'2"	+2"	1"	10°0'1"	+1"	10°0'1"	+1"
15°	15°0'0"	0"	15°0'8"	+8"	8"	15°0'2"	+2"	15°0'1"	+1"
20°	19°59'55"	−5"	20°0'20"	+20"	25"	20°0'0"	0"	20°0'0"	0"
25°	24°59'40"	−20"	25°1'18"	78"	98"	25°0'0"	0"	24°59'58"	−2"
30°	29°59'14"	−46"	30°3'18"	198"	244"	30°0'3"	+3"	29°59'58"	−2"
34°	33°58'31"	−89"	34°6'21"	381"	470"	34°0'5"	5"	33°59'56"	−4"
35°	34°58'17"	−103"	35°7'24"	444"	547"	35°0'6"	6"	34°59'56"	−4"
36°	35°58'5"	−115"	36°8'35"	515"	630"	36°0'11"	11"	35°59'58"	−2"
40°	39°56'40"	−200"	40°15'3"	903"	1103"	40°0'21"	21"	39°59'58"	−2"
41°	40°56'13"	−227"	41°17'11"	1031"	1258"	41°0'25"	25"	40°59'59"	−1"
42°	41°55'41"	−259"	42°19'39"	1179"	1438"	42°0'29"	29"	42°0'0"	−0"
43°	42°55'7"	−293"	43°22'16"	1336"	1629"	43°0'33"	33"	43°0'0"	−0"
44°	43°54'34"	−326"	44°25'15"	1515"	1841"	44°0'42"	42"	44°0'5"	+5"
45°	44°53'52"	−428"	45°28'33"	1693"	2121"	45°0'48"	48"	45°0'7"	+7"

De hoeken zijn berekend met logarithmen in 5 decimalen; alleen bij 30° en 45° is de berekening met een grootere nauwkeurigheid uitgevoerd.

7. Het is intusschen niet moeilijk, om met behulp van de methode der onbepaalde coëfficiënten benaderingsformules van hoogere orde op te stellen, zij het ook, dat deze wegens haar ingewikkeldheid practisch van weinig nut zijn. Zoo heeft men bijv.

$$\beta - \frac{45 \sin \beta}{29 + 17 \cos \beta - \cos^2 \beta} = \frac{1}{1512} \beta^7 + \ldots .$$

welke formule nog tot ongeveer 30° goede benaderingen geeft, alsmede

$$\beta - \frac{945 \sin \beta}{604 + 372 \cos \beta - 36 \cos^2 \beta + 5 \cos^3 \beta} = \frac{23}{226800} \beta^9 + \ldots .$$

De benaderingsformules zijn dan:

$$B \approx \varrho \frac{45ab}{29a^2 + 17ac - c^2}$$

en

$$B \approx \varrho \frac{945a^2b}{604a^3 + 372a^2c - 36ac^2 + 5c^3}.$$

Deze en dergelijke formules geven grond tot de meening, dat het wel niet zal gelukken om formules van vrij eenvoudigen bouw te vinden, die in het geheele interval $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ een benadering tot in secunden nauwkeurig opleveren. Voor berekeningen, waarbij slechts een resultaat tot in minuten nauwkeurig wordt verlangd, kan men echter het vraagstuk als opgelost beschouwen.